前言

本书的研究对象是典型群. 它们或者是由某些特定形式的矩阵构成的群, 或者是这些矩阵群的商群. 矩阵群是人们从很早就开始研究的对象, 它们不仅在数学本身的各个分支有着广泛的应用, 在物理学等其他学科领域也发挥着极其重要的作用.

群的概念最早源于Galois[1] 研究一般5次方程是否有根式解的工作. 他把一个5次方程与其所有复根之间的一组变换联系起来. 用现代术语, 这些变换就构成了一个群. 一个方程有根式解的充分必要条件是它对应一个**可解群** (solvable group). 而Galois构造了一个5次方程, 证明相应的群是非交换单群A_5, 是不可解的, 进而证明了一般的5次方程没有根式解.

根据Jordan[2]-Hölder[3]定理, 有限群必有**合成群列** (composition series), 其**合成因子** (composition factor)都是单群. 从这个意义上讲, 有限单群是构造有限群的基本单位, 它们在有限群研究中所起的作用类似于素数在数论中的作用. 在20世纪80年代以前, 有限单群分类一直是有限群研究的中心问题之一. 而用合成因子的术语, 群G可解的充分必要条件是其合成因子均为交换单群, 即素数阶循环群 $\mathbb{Z}_p$.

交换单群只有素数阶循环群, 而非交换单群的情况就复杂得多了. 用现代术语, 非交换单群可以分成三大类: (1) 交错群A_n ($n \geq 5$); (2) Lie型单群; (3) 零散(sporadic)单群.

交错群A_n是19世纪人们就知道的一个有限单群的无限族. 上面已经提到, 早在1832年Galois就证明了A_5是单群. 这也是最小的一个非交换单群. **Lie型单群**[4] (simple groups of Lie type)是有限单群的主体. 其中最基本的例子是特殊射影线性群$PSL_n(q)$, 这里$q = p^f$为素数方幂. 其他如辛群、酉群、正交群等, 都属于Lie型单群的范畴. 特别地, 线性群、辛群、酉群和正交群通常被称为 **典型群**(classical groups). 早在1901年, Dickson[5]在其专著[12] 中

[1]Évariste Galois (1811.10.25—1832.5.31), 法国数学家.

[2]Marie Ennemond Camille Jordan (1838.1.5—1922.1.22), 法国数学家.

[3]Otto Ludwig Hölder (1859.12.22—1937.8.29), 德国数学家.

[4]Marius Sophus Lie (1842.12.17—1899.2.18), 挪威数学家.

[5]Leonard Eugene Dickson (1874.1.22—1954.1.17), 美国数学家.

对它们就有完整的描述. 而"典型群"这个名称是1946年Hermann Weyl[6]在他的同名著作 [25]中首先使用的. 1955年, Chevalley[7][10]给出了这些典型群的一个统一的构造模式, 将其视为某些Lie代数结构的自同构群, 并且从这种观点出发, 得到了新的有限单群的无限族. 这也是称它们为Lie型单群的原因.

典型群是高等代数和抽象代数的一个自然拓展和延续, 因为典型群可以统一看做具有某些特定几何结构的线性空间的变换群.

设F是一个域, V是F上的n维线性空间, 则V上的全体可逆线性变换构成一个群$GL(V)$. 取定V的一个基$v_1, \cdots, v_n$, 则V的任一线性变换在这个基下的矩阵是唯一确定的, 于是$GL(V)$中的每个可逆线性变换就1-1对应于F上的一个n阶可逆方阵. F上的全体n阶可逆方阵构成一个群, 记为$GL_n(F)$, 称为**一般线性群**(general linear group). 显然$GL_n(F) \cong GL(V)$.

在高等代数中我们知道, 对于实数域$\mathbb{R}$上的n维线性空间V, 如果赋予V一个正定的内积, V中的向量就具备了长度, 向量之间就有了夹角等度量性质和垂直等几何关系. 换言之, 我们就为V赋予了一个几何结构, 得到所谓的**正交空间** (orthogonal space). 进而可以考虑$GL(V)$中那些保持特定内积不变的线性变换, 这样就得到了**正交群** (orthogonal group).

类似地, 对于复数域$\mathbb{C}$上的n维线性空间V, 我们也可以定义某种内积. 这时V中向量之间尽管没有了夹角, 但仍然有长度等度量性质和垂直等几何关系, 形成所谓的**酉空间** (unitary space). 同样可以考虑$GL(V)$中那些保持内积不变的线性变换, 进而得到**酉群** (unitary group).

在本书中, 我们把上述做法推广到任意域F, 考察F上的有限维线性空间V. 我们要给V赋予某些满足特定条件的几何结构, 进而研究保持这些几何结构的变换群.

从教学的角度看，数学或者相近专业的学生中有许多在学过"高等代数"和"抽象代数"课程之后便没有进一步的代数方面的课程了. 当他们要学习一些后续课程时，往往会感到所需要的代数知识与学过的课程之间存在不小的差距. 多年来作者一直在探索建设一门能够帮助学生从抽象代数的基础知识进阶到较为现代的课程的具有中间环节性质的课程. 这也是编写本书的起因之一. 本书的主要章节曾多次作为北京大学数学科学学院高年级本科生和研究生相关课程的讲义, 部分内容也曾经在全国数学研究生暑期学校的系列报告中做过介绍.

我们假定读者对线性代数的基本理论和方法有较好的理解和掌握，同时具备抽象代数和群论的初步知识. 抽象代数方面的标准参考书为Jacobson[8][18]和聂灵沼、丁石孙 [3]. 群论方面可参看Huppert [15], Aschbacher [7]和徐明曜

[6]Hermann Klaus Hugo Weyl (1885.11.9—1955.12.8), 德国数学家.

[7]Claude Chevalley (1909.2.11—1984.6.28), 法国数学家.

[8]Nathan Jacobson (1910.10.5—1999.12.5), 美国数学家.

[1, 2]. 有关典型群及有限单群的参考书, 除了前面提到的文献[12]和[25]之外, 其他经典有 Artin[9][6], Carter[9]. 较新的有Taylor[23], Grove[14]和Wilson[26].

本书中, 我们有意识地对代数概念背后的几何意义加以说明, 以强调代数与几何之间的内在联系, 例如自反的sesquilinear 形式与配极之间的关系. 作者以为, 代数是一种表达, 而几何是其内涵. 缺少内涵的表达会失之于空泛, 而不善表达的内涵其发挥的作用也会大打折扣. 因此, 代数与几何之间有一种互为表里的关系, 需得融会贯通, 方能相辅相成、相映成辉. 出于同样的考虑, 我们专门写了一个附录, 说明对偶、直射、配极等几何概念与半线性映射、sesquilinear形式等代数概念之间的内在联系, 以期加深读者在这方面的理解.

在具体处理方面, 我们尽量采用初等方法, 所以对一般线性群、辛群、酉群和正交群分别介绍. 对于特征2域上的正交几何和正交群, 专门单辟一章, 着重说明这种情形下的特殊性. 但是细心的读者应该能够发现, 在这些不同类型的群之间, 不论是在其本身的性质还是在处理的方法方面都有一些共同之处. 作为例证, 我们在第三章中给出了 Witt[10] 定理(58页定理3.5.2)的一个统一的证明. 对于典型群也可以从Lie代数角度出发给予统一的描述, 对这方面感兴趣的读者无疑应当研读Carter的经典著作[9]. 统一处理典型群的更为现代的理论框架是Tits几何和Building理论, 对这方面感兴趣的读者可参看文献 [5, 13, 21]等.

书中给出了一些习题, 其中一部分是属于验证性的, 另一些则提供了进一步的结果. 为了方便读者自学, 我们在书后给出了部分习题的解答或者提示.

本书的内容远远超出了一学期课程可能的限度. 根据作者的教学实践, 作为研究生和大学高年级本科生一个学期的课程, 教师可以讲授第一章、第二章的前三节、以及第三章和第四章的全部, 然后根据具体情况选用后三章的部分内容.

北京大学出版社的曾婉婷女士为本书的付印出版给予了许多帮助, 特此致谢.

[9]Emil Artin (1898.3.3—1962.12.20), 奥地利裔数学家.

[10]Ernst Witt (1911.6.26—1991.7.3), 德国数学家. 两岁时随父母到中国长沙, 1920年被送回德国.