

习题课 (二)

1. 课本: (9-3) 证明: $G = D_r' \hat{P} F \Lambda_m^{-1}$, $F = D_c' \hat{P}' G \Lambda_m^{-1}$.

2. (第9章) 对于列联表的相对频数阵 $P = (p_{ij})_{n \times p}$,

若 i_1 行与 i_2 行分布轮廓同, 记 $\frac{p_{i_1 j}}{p_{i_1 \cdot}} = \frac{p_{i_2 j}}{p_{i_2 \cdot}}$, $j=1, 2, \dots, p$.

则 i_1 与 i_2 行可合并为一行 i_0 , 其分布轮廓为 $\frac{p_{i_0 j}}{p_{i_0 \cdot}} = \frac{p_{i_1 j} + p_{i_2 j}}{p_{i_1 \cdot} + p_{i_2 \cdot}}$, $j=1, \dots, p$.

证明: 1) $\frac{p_{i_0 j}}{p_{i_0 \cdot}} = \frac{p_{i_1 j}}{p_{i_1 \cdot}} = \frac{p_{i_2 j}}{p_{i_2 \cdot}}$, $j=1, 2, \dots, p$.

2) 合并前后任两列 j, j' 的卡方距离不变

3. (第10章) 设 $D\left(\frac{\bar{X}}{\bar{Y}}\right) = \Sigma > 0$ (正定), 证明: $\bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 的第一典型相关系数 λ_1 满足 $\lambda_1^2 < 1$.

4. (第10章) 设 $D\left(\frac{\bar{X}}{\bar{Y}}\right) = \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} > 0$, 令 $T = \Sigma_{11}^{-1/2} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1/2}$,
令 $M_1 = \Sigma_{11}^{-1/2} (TT') \Sigma_{11}^{1/2}$, $M_2 = \Sigma_{22}^{-1/2} (T'T) \Sigma_{22}^{1/2}$.

1) 证明: TT' , $T'T$, M_1 , M_2 具有相同的非零特征值

2) 已知: 对特征根 λ_i , TT' 的单位特征向量为 $\bar{\alpha}_i$, $T'T$ 的单位特征向量为 $\bar{\beta}_i$.

求: M_1, M_2 对应于 λ_i 的特征向量

5. (第10章) 用4中的结论求: $\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\bar{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 的典型相关变量及典型相关系数. 其中 $D\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.4 & 1 & 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & 1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 为标准变量.