中国科学: 数学　2021 年　第 51 卷　第 11 期: 1819～1844
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates
论 文

分枝 Markov 过程的脊柱分解及其应用

献给严加安院士 80 华诞

任艳霞[1]，宋仁明[2,3*]

1. 北京大学数学科学学院, 北京 100871;
2. Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana, IL 61801, USA;
3. 四川大学数学学院, 成都 610064
E-mail: yxren@math.pku.edu.cn, rsong@illinois.edu

收稿日期: 2020-07-23; 接受日期: 2020-10-26; 网络出版日期: 2021-11-09; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11671017, 11731009 和 11931004) 和 Simons 基金会 (批准号: 429343) 资助项目

摘要　现有分枝 Markov 过程脊柱分解的构造都有一个假设条件: 单个粒子的后代个数 $\geqslant 1$. 本文给出一般分枝 Markov 过程脊柱分解的详细构造, 并允许单个粒子后代个数为 0. 然后, 给出脊柱分解的一些应用.

关键词　分枝 Brown 运动　分枝 Hunt 过程　Kesten-Stigum 定理　脊柱分解定理　行波解

MSC (2020) 主题分类　60J80, 60F15, 60J25

1　引言

脊柱分解定理是研究各种分枝模型的极限性质非常有用的工具. 这一方法首先在文献 [1] 中对 Galton-Watson 过程引入, 用于给出上临界情形下 Kesten-Stigum 的 $L\log L$ 型定理, 以及临界与下临界情形下存活概率随时间的衰减速度等结果的概率证明. 之后, 这一方法被推广到其他具有分枝性的模型, 有关多物种分枝过程, 参见文献 [2–4]; 有关分枝 Markov 过程, 参见文献 [5–11]; 有关超过程, 参见文献 [12–17]; 有关分枝随机游动, 参见文献 [18].

对于 Galton-Watson 过程及超过程, 脊柱分解定理已经很完善. 但是, 对于分枝 Markov 过程的脊柱分解定理, 现有文献大都假设单个粒子死亡后至少产生 1 个后代, 参见文献 [6,9]. 文献 [19,20] 使用了没有假设单个粒子至少产生 1 个后代的脊柱分解定理, 但是没有详细给出脊柱分解的构造. 本文的目的是, 在没有单个粒子至少产生 1 个后代的限制条件下, 给出分枝 Markov 过程脊柱分解的详细构造. 实际上, 我们不假设分枝 Markov 过程是上临界的, 所以得到的脊柱分解也适用于临界与下临界的情形. 本文最后一节会给出脊柱分解定理的一些应用.

英文引用格式: Ren Y-X, Song R. Spine decomposition for branching Markov processes and its applications (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1819–1844, doi: 10.1360/SSM-2020-0234

　

现在介绍文章的假设与记号. 总假设 E 是局部紧的可分距离空间, m 是 E 上支撑为全空间的 σ-有限 Borel 测度. 用 $E_\Delta := E \cup \{\Delta\}$ 表示 E 的单点紧化后的空间, 用 $\mathcal{B}(E)$ 与 $\mathcal{B}(E_\Delta)$ 分别表示 E 上和 E_Δ 上 Borel σ 域, $\mathcal{B}_b(E)$ ($\mathcal{B}^+(E)$) 表示 E 上所有有界 (非负) $\mathcal{B}(E)$ 可测函数全体. 所有定义在 E 上的函数 f, 通过定义 $f(\Delta) = 0$, 自动延拓到 E_Δ 上. 令 $\boldsymbol{M}_p(E)$ 表示 E 上所有有限点测度全体, 即所有形式为 $\mu = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ 的测度全体, 其中 $n = 0, 1, 2, \dots$, $x_i \in E$, $i = 1, \dots, n$ (当 $n = 0$ 时, μ 是零测度). 对 E 上的任意函数 f 及任意 $\mu \in \boldsymbol{M}_p(E)$, 用 $\langle f, \mu \rangle$ 或 $\mu(f)$ 表示 f 关于 μ 的积分.

总假设 $Y = \{Y_t, \Pi_x, \zeta\}$ 是 E 上 Hunt 过程, 具有参考测度 m, 这里 $\zeta = \inf\{t > 0 : Y_t = \Delta\}$ 是 Y 的寿命. 令 $\{P_t, t \geqslant 0\}$ 表示 Y 的转移半群:

$$P_t f(x) = \Pi_x[f(Y_t)], \quad f \in \mathcal{B}^+(E).$$

$\{P_t, t \geqslant 0\}$ 可以扩展为 $L^2(E, m)$ 上强连续半群.

考虑一个以下 3 要素决定的分枝粒子系统:

(i) 状态空间为 E 的 Hunt 过程 $Y = \{Y_t, \Pi_x, \zeta\}$;

(ii) E 上非负有界 Borel 函数 β;

(iii) 后代分布 $\{(p_n(x))_{n=0}^\infty; x \in E\}$, 且对任意 $n \geqslant 0$, $p_n(x)$ 是 Borel 函数.

令

$$\psi(x, z) = \sum_{n=0}^\infty p_n(x) z^n, \quad z \geqslant 0. \tag{1.1}$$

$\psi(x, \cdot)$ 是后代分布 $(p_n(x))_{n=0}^\infty$ 的概率母函数.

分枝 Hunt 过程由下面 5 条性质刻画:

(i) 每个粒子的出生时间与死亡时间都是随机的;

(ii) 如果某个粒子在 $x \in E$ 点出生, 则该粒子在出生后按 Π_x 在空间 E 中运动;

(iii) 在给定粒子的轨道 Y 并假设粒子在 t 时存活的条件下, 粒子在时间区间 $[t, t+dt)$ 死亡的概率为 $\beta(Y_t)dt + o(dt)$;

(iv) 当粒子在位置 x 死亡时, 粒子瞬间在位置 x 以概率 $p_n(x)$ 产生 n 个后代;

(v) 点 Δ 是坟墓, 粒子到达 Δ 后将停留在 Δ, 并且在 Δ 点没有分枝.

为了避免没有分枝的退化情形, 总假设 $m(\{x \in E, \beta(x) > 0\}) > 0$, 同时假设

$$A(x) := \psi'(x, 1) = \sum_{n=0}^\infty n p_n(x)$$

是有界的.

对任意 $c \in \mathcal{B}_b(E)$, 定义

$$e_c(t) = \exp\bigg(-\int_0^t c(Y_s) ds\bigg).$$

令 $X_t(B)$ 表示 t 时刻存活且空间位置在 B 中的粒子个数, 这里 $B \in \mathcal{B}(E)$. 注意, 如果粒子在 t 时刻死亡, 即使死亡位置在 B 中, 此粒子也不计入 $X_t(B)$ 的计数中. $\{X_t, t \geqslant 0\}$ 是取值于 $\boldsymbol{M}_p(E)$ 的 Markov 过程, 称之为 (Y, β, ψ)- 分枝 Hunt 过程. 对任意 $\mu \in \boldsymbol{M}_p(E)$, 令 $\boldsymbol{P}_\mu$ 表示初值 $X_0 = \mu$ 时 $\{X_t, t \geqslant 0\}$ 的率, 则有

$$\boldsymbol{P}_\mu \exp\langle -f, X_t \rangle = \exp\langle \log u_t(\cdot), \mu \rangle, \tag{1.2}$$

这里 $u_t(x)$ 满足下面的方程:

$$u_t(x)=\Pi_x\bigg[e_\beta(t)\exp(-f(Y_t))+\int_0^t e_\beta(s)\beta(Y_s)\psi(Y_s,u_{t-s}(Y_s))ds\bigg],\quad t\geqslant 0.\tag{1.3}$$

(1.3) 研究的是 0 时刻从单个位于 x 的粒子出发的过程所满足的方程, 这个式子具有一个清晰的直观解释: 括号中第一项对应初始粒子 t 时刻仍然存活的情形; 括号中第二项对应初始粒子在 t 时刻之前死亡的情形. (1.3) 意味着

$$u_t(x)=\Pi_x\int_0^t[\psi(Y_s,u_{t-s}(Y_s))-u_{t-s}(Y_s)]\beta(Y_s)ds+\Pi_x\exp(-f(Y_t)),\quad t\geqslant 0\tag{1.4}$$

(参见文献 [21, 第 2.3 小节]). 对任意 $\mu\in\boldsymbol{M}_p(E)$, $f\in\mathcal{B}_b^+(E)$, $t\geqslant 0$, 有

$$\boldsymbol{P}_\mu[\langle f,X_t\rangle]=\Pi_\mu[e_{(1-A)\beta}(t)f(Y_t)].\tag{1.5}$$

令 $\{P_t^{(1-A)\beta},t\geqslant 0\}$ 为下面的 Feynman-Kac 半群:

$$P_t^{(1-A)\beta}f(x):=\Pi_x[e_{(1-A)\beta}(t)f(Y_t)],\quad f\in\mathcal{B}(E).$$

假设 1.1 存在严格正的 Borel 函数 ϕ 和常数 $\lambda_1\in(-\infty,\infty)$ 使得

$$\phi(x)=\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}P_t^{(1-A)\beta}\phi(x),\quad x\in E.\tag{1.6}$$

令 $\mathcal{E}_t=\sigma(Y_s;s\leqslant t)$. 注意到

$$\frac{\phi(Y_t)}{\phi(x)}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}e_{(1-A)\beta}(t),\quad t\geqslant 0$$

在概率 Π_x 下是鞅, 从而可以定义测度的鞅变换:

$$\frac{d\Pi_x^\phi}{d\Pi_x}\bigg|_{\mathcal{E}_t}=\frac{\phi(Y_t)}{\phi(x)}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}e_{(1-A)\beta}(t).\tag{1.7}$$

对于任意非零测度 $\mu\in\boldsymbol{M}_p(E)$, 定义

$$M_t(\phi):=\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\frac{\langle\phi,X_t\rangle}{\langle\phi,\mu\rangle},\quad t\geqslant 0.$$

引理 1.1 对任意非零测度 $\mu\in\boldsymbol{M}_p(E)$, $\{M_t(\phi),t\geqslant 0\}$ 在概率测度 $\boldsymbol{P}_\mu$ 下是非负鞅, 从而在 $\boldsymbol{P}_\mu$-几乎必然意义下存在极限 $M_\infty(\phi)\in[0,\infty)$.

证明 根据 X 的 Markov 性、(1.5) 和 (1.6), 可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_\mu[M_{t+s}(\phi)\mid\mathcal{F}_t]&=\frac{1}{\langle\phi,\mu\rangle}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\boldsymbol{P}_{X_t}[\mathrm{e}^{-\lambda_1 s}\langle\phi,X_s\rangle]\\&=\frac{1}{\langle\phi,\mu\rangle}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\langle\mathrm{e}^{-\lambda_1 s}\Pi_\cdot[e_{(1-A)\beta}(s)\phi(Y_s)],X_t\rangle\\&=\frac{1}{\langle\phi,\mu\rangle}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\langle\phi,X_t\rangle=M_t(\phi).\end{aligned}$$

这证明了 $\{M_t(\phi),t\geqslant 0\}$ 是 $\boldsymbol{P}_\mu$- 非负鞅, 从而当 $t\to\infty$ 时具有几乎必然极限 $M_\infty(\phi)\in[0,\infty)$. □

根据分枝性知, 若 $\mu\in \boldsymbol{M}_p(E)$ 由 $\mu=\sum_{i=1}^n\delta_{x_i}$ 给出, 其中 $n=1,2,\dots$, $\{x_i;i=1,\dots,n\}\subset E$, 则

$$M_t(\phi)=\sum_{i=1}^n \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\frac{\langle \phi^t,X_t^i\rangle}{\phi(x_i)}\cdot\frac{\phi(x_i)}{\langle\phi,\mu\rangle},$$

这里, 对任意 $i=1,\dots,n$, $\{X_t^i,t\geqslant 0\}$ 是从 δ_{x_i} 出发的独立分枝 Hunt 过程. 这样如果某个结论对所有 $\boldsymbol{P}_{\delta_x}$ $(x\in E)$ 成立, 则此结果对于一般的 $\mu\in\boldsymbol{M}_p(E)$ 成立. 所以, 本文后续总假设初始测度由 $\mu=\delta_x$ $(x\in E)$ 给出, 并且将 $\boldsymbol{P}_{\delta_x}$ 简记为 $\boldsymbol{P}_x$.

2 脊柱分解

令 $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$. 用 $\Gamma:=\bigcup_{n=0}^\infty\mathbb{N}^n$ (这里 $\mathbb{N}^0=\{\emptyset\}$) 刻画分枝 Hunt 过程的家族结构. 对任意 $u\in\mathbb{N}^n$, 如果 $n\geqslant 1$ 且 $u=(u_1,\dots,u_n)$, 则定义其长度 (或者代数) $|u|$ 为 n. 将 $(u_1,\dots,u_{n-1})$ 记为 $u-1$, 并称它为 u 的父亲. 对任意 $i\in\mathbb{N}$ 和 $u=(u_1,\dots,u_n)$, 用 $ui=(u_1,\dots,u_n,i)$ 表示 u 的第 i 个孩子. 更一般地, 对 $u=(u_1,\dots,u_n)$, $v=(v_1,\dots,v_m)\in\Gamma$, 用 uv 表示 u 和 v 的连接 $(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_m)$. 用 $v<u$ 表示 v 是 u 的祖先. u 的所有祖先组成的集合为 $\{v\in\Gamma:\ v<u\}=\{v\in\Gamma:\exists w\in\Gamma\setminus\{\emptyset\}$ 使得 $vw=u\}$. 记号 $v\leqslant u$ 表示 $v<u$ 或者 $v=u$.

一个子集 $\tau\subset\Gamma$ 在满足下面 3 个条件时称为一个 Galton-Watson 树: (i) $\emptyset\in\tau$; (ii) 如果 $u,v\in\Gamma$, 则 $uv\in\tau$ 意味着 $u\in\tau$; (iii) 对所有 $u\in\tau$, 存在 $r^u\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 使得对 $j\in\mathbb{N}$, $uj\in\tau$ 当且仅当 $1\leqslant j\leqslant r^u$ 成立. 令 $\mathbb{T}$ 表示所有 Galton-Watson 树全体. 如果 $u\in\tau$, 则称 u 为树 τ 的一个节点或者个体, 或者直接称为一个粒子.

为了详细刻画分枝 Hunt 过程 X, 需要引入带标记 Galton-Watson 树的概念. 假设每个粒子 $u\in\tau$ 带有一个标记 (Y^u,σ^u,r^u), 这里,

(i) σ^u 是粒子 u 的寿命, u 及其祖先的寿命决定了 u 的分裂时间 (或者粒子 u 的死亡时间) 为 $\zeta^u=\sum_{v\leqslant u}\sigma^v$ $(\zeta^\emptyset=\sigma^\emptyset)$, u 的出生时间为 $b^u=\sum_{v<u}\sigma^v$ $(b^\emptyset=0)$;

(ii) $Y^u:[b^u,\zeta^u]\to E_\Delta$ 给出了粒子 u 的位置, 并且 $Y^u_{b^u}=Y^{u-1}_{\zeta^{u-1}}$ 成立;

(iii) r^u 给出了粒子 u 死亡后的后代个数, 一般情形下, r^u 依赖于 $Y^u_{\zeta^u}$.

用 (τ,Y,σ,r) (或简单地 (τ,M)) 表示一棵带标记 Galton-Watson 树. 用 $\mathcal{T}=\{(\tau,M):\tau\in\mathbb{T}\}$ 表示所有带标记 Galton-Watson 树全体.

定义 $\mathcal{T}$ 上的 σ 代数:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_t:=\sigma\{&[u,r^u,\sigma^u,(Y_s^u,s\in[b^u,\zeta^u]):u\in\tau\in\mathbb{T}\ \text{且}\ \zeta^u\leqslant t]\ \text{与}\\ &[u,(Y_s^u,s\in[b^u,t]):u\in\tau\in\mathbb{T}\ \text{且}\ t\in[b^u,\zeta^u)]\}.\end{aligned}$$

令 $\mathcal{F}=\bigcup_{t\geqslant 0}\mathcal{F}_t$. 假设 $\{\boldsymbol{P}_x:x\in E\}$ 是 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ 上概率测度, 使得 $(\mathcal{T},\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0},(\boldsymbol{P}_x)_{x\in E})$ 为 E 上分枝 Hunt 过程 X 的典则模型. 对每个 $x\in E$, $\boldsymbol{P}_x$ 表示从单个位于 x 的粒子出发的分枝 Hunt 过程的分布. 有关概率测度 $\{\boldsymbol{P}_x:x\in E\}$ 的详细构造, 可参见文献 [22–24]. 在概率测度 $\boldsymbol{P}_x$ 下, 分枝 Hunt 过程的演变由下面 3 条来刻画:

(i) 根粒子按率 Π_x 运动.

(ii) 在已知粒子 u 的轨道 $Y^u_\cdot$、并假设粒子 u 在 t 时刻存活的条件下, u 在时间区间 $[t,t+dt)$ 死亡的概率为 $\beta(Y_t^u)dt+o(dt)$.

(iii) 当 u 死亡时, u 被 r^u 个后代代替, r^u 的分布由 $P(Y^u_{\zeta_u})=(p_k(Y^u_{\zeta_u}))_{k\in\mathbb{N}}$ 给定. u 的后代独立地按 $\Pi_{Y^u_{\zeta_u}}$ 运动. 确切地, $(Y^u_s, s\in[b^u,\zeta^u])$ 是一个在 b^u 时刻从位置 $Y^{u-1}_{\zeta^{u-1}}$ 出发的分枝 Hunt 过程的版本在 $[b^u,\zeta^u]$ 的限制.

对于一个给定的带标记树 (τ,Y,σ,r), 令 $L_t=\{u\in\tau: b^u\leqslant t<\zeta^u\}$ 表示在 t 时刻存活的粒子全体, 则

$$X_t=\sum_{u\in L_t}\delta_{Y^u_t}.$$

对任意 $x\in E$, $\{M_t(\phi),t\geqslant 0\}$ 是一个 $\boldsymbol{P}_x$- 鞅, 从而可以用 $\{M_t(\phi),t\geqslant 0\}$ 定义测度 $\boldsymbol{P}_x$ 的一个鞅变换. 我们关心的是, 如何理解这个新测度, 即在这个新测度下过程 X 如何演变. 为此, 需要定义一个新的样本空间 $\widetilde{\mathcal{T}}$, 它是所有具有一个特别脊柱的带标记树全体. 对一个带标记树 (τ,Y,σ,r), 令 $D_t=\{u\in\tau:\zeta^u\leqslant t, r^u=0\}$ 表示在 t 时刻之前或者在 t 时刻死亡且没有后代的粒子. 假设 $\dagger$ 是一个虚构的不在树 τ 上的粒子. 带标记树 (τ,Y,σ,r) 上的一个脊柱 ξ 是 $\tau\cup\{\dagger\}$ 的一个子集, 满足

- $\emptyset\in\xi$ 且对任意 $t\geqslant 0$, $|\xi\cap(L_t\cup\{\dagger\})|=1$;
- 如果 $v\in\xi$ 且 $u<v$, 那么 $u\in\xi$;
- 如果 $v\in\xi$ 且 $r^v>0$, 那么存在唯一的 $j=1,\dots,r^v$ 使得 $vj\in\xi$;
- 如果 $v\in\xi$ 且 $r^v=0$, 那么对任意 $t\geqslant\zeta^v$, $\xi\cap L_t$ 是空集, 在这种情形下, 记 $v=\dagger-1$.

注意, 脊柱只包含脊柱上的节点信息 (即知道哪些节点在脊柱上), 但是不知道脊柱的分裂时间和分裂时的后代个数. 虚构粒子 (或节点) $\dagger$ 可以在空间运动, 但我们对其运动不关心. 这样, 称 $\zeta^{\dagger-1}$ 为脊柱的 "寿命". $\dagger$ 的寿命是无穷.

令

$$\widetilde{\mathcal{T}}=\{(\tau,Y,\sigma,r,\xi):(\tau,Y,\sigma,r)\in\mathcal{T}\text{ 且 }\xi\text{ 是 }(\tau,Y,\sigma,r)\text{ 的脊柱}\}$$

表示所有具有脊柱的带标记树全体.

给定 $(\tau,Y,\sigma,r,\xi)\in\widetilde{\mathcal{T}}$ 和 $t\geqslant 0$, 令 $\xi_t:=v$ 表示满足 $v\in\xi\cap(L_t\cup\{\dagger\})$ 的唯一的节点. 用 $\widetilde{Y}=(\widetilde{Y}_t)_{t\geqslant 0}$ 表示脊柱的空间运动, 并用 $n=(n_t:t\geqslant 0)$ 表示沿着脊柱的分裂时间形成的计数过程. 确切地, 如果 $u\in L_t\cap\xi$, 那么 $\widetilde{Y}_t=Y^u_t$ 且 $n_t=|u|$; 如果 $\xi_t=\dagger$, 则令 $\widetilde{Y}_t=Y^\dagger_t$; 如果存在 $s<t$ 使得 $u\in L_s$ 且 $u=\xi_s$, 则记 $u<\dagger$.

如果 $v\in\xi\cap L_t$ 且 $r^v>0$, 那么在分裂时间 ζ^v, 后代中恰有一个继续脊柱, 成为脊柱上粒子. 令 O_v 表示 v 的后代中非脊柱粒子全体组成的集合, 对任意使得 $vj\in O_v$ 的 $j=1,\dots,r^v$, 用 $(\tau,\ M)^v_j$ 表示以 vj 为根的带标记子树.

现在定义 $\widetilde{\mathcal{T}}$ 上两个 σ- 域流 $\{\widetilde{\mathcal{F}}_t\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geqslant 0}$:

$$\widetilde{\mathcal{F}}_t:=\sigma(\mathcal{F}_t,\xi_s,s\leqslant t),\quad \mathcal{G}_t:=\sigma(\widetilde{Y}_s:s\in[0,t]),\quad t\geqslant 0.$$

$\widetilde{\mathcal{F}}_t$ 知道到 t 时刻为止带标记树的所有信息及到 t 时刻为止脊柱上的节点信息 (从而知道到 $t\wedge\zeta^{\dagger-1}$ 为止, 脊柱的所有信息, 包括知道脊柱上粒子由哪些组成、何时出生、何时死亡及死亡时的后代个数). $\mathcal{G}_t$ 包含到 t 时刻为止脊柱的轨道信息.

令 $\widetilde{\mathcal{F}}:=\bigcup_{t\geqslant 0}\widetilde{\mathcal{F}}_t$, $\mathcal{G}:=\sigma(\widetilde{Y}_s:s\geqslant 0)$, $\widehat{\mathcal{G}}:=\sigma((\widetilde{Y}_s,\xi_s:s\geqslant 0),(\zeta^u:u<\dagger))$, $\widetilde{\mathcal{G}}:=\sigma(\mathcal{G},(\xi_s:s\geqslant 0),(\zeta^u,u<\dagger),(r^u:u<\dagger))$. σ- 域 $\mathcal{G}$ 知道脊柱的所有轨道信息, σ- 域 $\widehat{\mathcal{G}}$ 知道脊柱的所有轨道信息及沿脊柱的分裂时间信息, σ- 域 $\widetilde{\mathcal{G}}$ 知道脊柱的所有轨道信息、沿脊柱的分裂时间信息及分裂时的后代个数信息.

Hardy 和 Harris[6] 注意到将 $\{\boldsymbol{P}_x, x\in E\}$ 视为空间 $(\widetilde{\mathcal{T}},\mathcal{F})$ 上测度要比视为 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ 上测度更方便. 我们需要将概率测度 $\boldsymbol{P}_x$ 拓展为 $(\widetilde{\mathcal{T}},\widetilde{\mathcal{F}})$ 上概率测度 $\widetilde{\boldsymbol{P}}_x$, 使得脊柱是从树上选取的一条家族线. 假设在脊柱上粒子的分裂时刻, 如果脊柱粒子至少有一个后代, 那么从后代中等可能地选取一个粒子成为脊柱 ξ 上粒子, 继续这条家族线; 如果脊柱上粒子产生了 0 个后代, 那么规定脊柱由虚构粒子 $\dagger$ 继续. 从而对任意 $u\in\tau$ 有

$$\mathrm{Prob}(u\in\xi)=\prod_{v<u}\frac{1}{r^v}.$$

容易看出

$$\sum_{u\in L_t}\prod_{v<u}\frac{1}{r^v}+\sum_{u\in D_t}\prod_{v<u}\frac{1}{r^v}=1.$$

首先给出一个表示结果, 这个表示是文献 [18] 中有关 $p_0=0$ 情形时结果的推广.

定理 2.1 任意 $f\in\widetilde{\mathcal{F}}_t$ 可以写成如下形式:

$$f=\sum_{u\in L_t}f^u(\tau,M)\mathbf{1}_{\{\xi_t=u\}}+\sum_{u\in D_t}f^u(\tau,M)\mathbf{1}_{\{\dagger-1=u\}},\tag{2.1}$$

这里 $f^u\in\mathcal{F}_t$.

证明 假设 $f(\tau,M,\xi)\in\widetilde{\mathcal{F}}_t$. 对任意 $t>0$, 存在唯一 $u\in L_t\cup\{\dagger\}$ 使得 $\xi_t=u$, 且如果 $\xi_t=\dagger$, 则存在唯一 $u\in D_t$ 使得 $\dagger-1=u$. 这样, 有

$$\sum_{u\in L_t}\mathbf{1}_{\{\xi_t=u\}}+\sum_{t\in D_t}\mathbf{1}_{\{\dagger-1=u\}}=1,$$

从而,

$$\begin{aligned}f&=\sum_{u\in L_t}f(\tau,M,\xi_t)\mathbf{1}_{\{\xi_t=u\}}+\sum_{u\in D_t}f(\tau,M,\dagger-1)\mathbf{1}_{\{\dagger-1=u\}}\\&=\sum_{u\in L_t}f(\tau,M,u)\mathbf{1}_{\{\xi_t=u\}}+\sum_{u\in D_t}f(\tau,M,u)\mathbf{1}_{\{\dagger-1=u\}}.\end{aligned}$$

由于 $f\in\widetilde{\mathcal{F}}_t$, 对任意一个固定的 $u\in L_t\cup D_t$, 有 $f^u:=f(\tau,M,u)\in\mathcal{F}_t$. 所以 (2.1) 成立. □

在 $\widetilde{\mathcal{F}}_t$ 上定义测度 $\widetilde{\boldsymbol{P}}_x$ 如下:

$$\begin{aligned}&d\widetilde{\boldsymbol{P}}_x(\tau,M,\xi)\,|_{\widetilde{\mathcal{F}}_t}\\&\quad=\mathbf{1}_{\{\xi_t\in\tau\}}d\Pi_x(\widetilde{Y})dL^{\beta(\widetilde{Y})}(\boldsymbol{n})\prod_{v<\xi_t}p_{r^v}(\widetilde{Y}_{\zeta^v})\prod_{v<\xi_t}\frac{1}{r^v}\prod_{j:vj\in O_v}d\mathbf{P}^{t-\zeta^v}_{\widetilde{Y}_{\zeta^v}}((\tau,M)^v_j)\\&\qquad+\mathbf{1}_{\{\xi_t=\dagger\}}d\Pi_x(\widetilde{Y})dL^{\beta(\widetilde{Y})}(\boldsymbol{n})\prod_{v<\dagger-1}p_{r^v}(\widetilde{Y}_{\zeta^v})\prod_{v<\dagger-1}\frac{1}{r^v}\prod_{j:vj\in O_v}d\mathbf{P}^{t-\zeta^v}_{\widetilde{Y}_{\zeta^v}}((\tau,M)^v_j),\end{aligned}\tag{2.2}$$

这里 $\Pi_x(\widetilde{Y})$ 是从 $x\in E$ 出发的 Hunt 过程 $\widetilde{Y}$ 的率; $L^{\beta(\widetilde{Y})}(\boldsymbol{n})$ 是沿轨道 $\widetilde{Y}$、强度为 $\beta(\widetilde{Y}_t)dt$ 的 Poisson 随机测度 $\boldsymbol{n}=\{\{\sigma_i:i=1,\dots,n_t\}:t\geqslant 0\}$ 的率, 其中 $\boldsymbol{n}$ 给出了沿脊柱的分裂时间; $p_{r^v}(y)=\sum_{k\geqslant 0}p_k(y)\mathbf{1}_{(r^v=k)}$ 是位于 $y\in E$ 的脊柱粒子 v 产生 r^v 个后代的概率; $\boldsymbol{P}^{t-s}_x((\tau,M)^v_j)$ 表示带标记树 $(\tau,M)^v_j$ 描述的分枝 Hunt 过程的率, 其中分枝 Hunt 过程初始时从单点 x 出发, 时间上被推移时间 s.

根据定理 2.1, 对任意有界的 $f\in\widetilde{\mathcal{F}}_t$, 有

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}_x(f\mid\mathcal{F}_t)=\widetilde{\boldsymbol{P}}_x\biggl(\sum_{u\in L_t}f^u(\tau,M)\mathbf{1}_{\{\xi_t=u\}}+\sum_{u\in D_t}f^u(\tau,M)\mathbf{1}_{\{\dagger-1=u\}}\,\bigg|\,\mathcal{F}_t\biggr)$$

$$= \sum_{u\in L_t} f^u(\tau,M)\prod_{v<u}\frac{1}{r^v} + \sum_{u\in D_t} f^u(\tau,M)\prod_{v<u}\frac{1}{r^v}.$$

这样, 对任意 $t\geqslant 0$ 和有界的 $f\in\widetilde{\mathcal{F}}_t$, 有

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}_x(f) = \boldsymbol{P}_x\bigg(\sum_{u\in L_t} f^u(\tau,M)\prod_{v<u}\frac{1}{r^v} + \sum_{u\in D_t} f^u(\tau,M)\prod_{v<u}\frac{1}{r^v}\bigg). \tag{2.3}$$

特别地,

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}_x(\widetilde{\mathcal{T}}) = \boldsymbol{P}_x\bigg(\sum_{u\in L_t}\prod_{v<u}\frac{1}{r^v} + \sum_{u\in D_t}\prod_{v<u}\frac{1}{r^v}\bigg) = \boldsymbol{P}_x(1) = 1,$$

这意味着 $\widetilde{\boldsymbol{P}}_x$ 是概率测度, $\widetilde{\boldsymbol{P}}_x$ 是 $\boldsymbol{P}_x$ 到 $(\widetilde{\mathcal{T}},\widetilde{\mathcal{F}})$ 空间的推广, 且对任意有界的 $f\in\widetilde{\mathcal{F}}_t$, 有

$$\int_{\widetilde{\mathcal{T}}} f\, d\widetilde{\boldsymbol{P}}_x = \int_{\widetilde{\mathcal{T}}}\bigg(\sum_{u\in L_t} f^u\prod_{v<u}\frac{1}{r^v} + \sum_{u\in D_t} f^u\prod_{v<u}\frac{1}{r^v}\bigg)\, d\boldsymbol{P}_x. \tag{2.4}$$

根据 (2.2) 给出的 $\widetilde{\boldsymbol{P}}_x$ 的分解式, 可以直观上给出 $\widetilde{\boldsymbol{P}}_x$ 下系统的如下构造:

(i) τ 的根在 0 时刻位于 x 处, 且脊柱过程 $\widetilde{Y}_t$ 在空间按率 Π_x 运动.

(ii) 给定脊柱的轨道 $\widetilde{Y}.$, 沿脊柱的分裂时间的率为 $L^{\beta(\widetilde{Y})}$, 这里 $L^{\beta(\widetilde{Y})}$ 是强度为 $\beta(\widetilde{Y}_t)dt$ 的 Poisson 随机测度的率.

(iii) 在脊柱上粒子 v 的分裂时刻, 此粒子被 r^v 个后代代替, 这里 r^v 是随机的, 其分布由 $P(\widetilde{Y}_{\zeta^v}) = (p_k(\widetilde{Y}_{\zeta^v}))_{k\geqslant 1}$ 给出.

(iv) 如果 $r^v>0$, 那么在 v 的分裂时刻, 从 v 的 r^v 个后代中等可能地选取一个粒子作为脊柱上粒子; 如果 $r^v=0$, 那么脊柱由虚构粒子 † 继续.

(v) 如果 $r^v\geqslant 2$, 剩余的 r^v-1 个非脊柱上粒子 $vj\in O_v$ 独立地生成随机子树 $(\tau,M)_j^v$, 这些子树的分布由推移到其出生时刻的 $\boldsymbol{P}_{\widetilde{Y}_{\zeta^v}}$ 决定.

定义 2.1 假设 $(\Omega,\mathcal{H},\mathrm{P})$ 是一个概率空间, $\{\mathcal{H}_t,t\geqslant 0\}$ 是 $(\Omega,\mathcal{H})$ 上 σ- 域流, 且 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{H}$ 的子 σ- 域. 称定义在 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ 的一个实值过程 $\{U_t,t\geqslant 0\}$ 关于 σ- 域流 $\{\mathcal{H}_t,t\geqslant 0\}$ 是一个 $\mathrm{P}(\cdot\mid\mathcal{K})$- 鞅, 如果下面 3 条成立: (i) $\{U_t,t\geqslant 0\}$ 是 $\{\mathcal{H}_t\vee\mathcal{K},t\geqslant 0\}$ 适应的; (ii) 对任意 $t\geqslant 0$, $\mathrm{E}(|U_t|)<\infty$; (iii) 对任意 $t>s$,

$$\mathrm{E}(U_t\mid\mathcal{H}_s\vee\mathcal{K}) = U_s,\quad \text{a.s.}$$

也称在给定 $\mathcal{K}$ 的条件下, $\{U_t,t\geqslant 0\}$ 关于 $\{\mathcal{H}_t,t\geqslant 0\}$ 是鞅.

下面结果取自文献 [9, 引理 2.3].

引理 2.1 假设 $(\Omega,\mathcal{H},\mathrm{P})$ 是概率空间, $\{\mathcal{H}_t,t\geqslant 0\}$ 是 $(\Omega,\mathcal{H})$ 上的 σ- 域流, 并假设 $\mathcal{K}_1$ 和 $\mathcal{K}_2$ 是 $\mathcal{H}$ 的两个子 σ- 域, 满足 $\mathcal{K}_1\subset\mathcal{K}_2$. 假设 $\{U_t^1,t\geqslant 0\}$ 关于 $\{\mathcal{H}_t,t\geqslant 0\}$ 是 $\mathrm{P}(\cdot\mid\mathcal{K}_1)$- 鞅, $\{U_t^2,t\geqslant 0\}$ 关于 $\{\mathcal{H}_t,t\geqslant 0\}$ 是 $\mathrm{P}(\cdot\mid\mathcal{K}_2)$- 鞅. 如果对任意 $t\geqslant 0$, $U_t^1\in\mathcal{K}_2$, $U_t^2\in\mathcal{H}_t$, 且 $\mathrm{E}(|U_t^1U_t^2|)<\infty$, 那么乘积 $\{U_t^1U_t^2,t\geqslant 0\}$ 关于 $\{\mathcal{H}_t,t\geqslant 0\}$ 是 $\mathrm{P}(\cdot\mid\mathcal{K}_1)$- 鞅.

引理 2.2 假设在给定轨道 $\widetilde{Y}$ 的条件下, $\boldsymbol{n}=\{\{\zeta_i:i=1,\ldots,n_t\}:t\geqslant 0\}$ 是沿轨道 $\widetilde{Y}$ 的具有强度 $\beta(\widetilde{Y}_t)dt$ 的 Poisson 随机测度, 则

$$\eta_t^{(1)} := \prod_{i\leqslant n_t} A(\widetilde{Y}_{\zeta_i})\cdot\exp\bigg(-\int_0^t((A-1)\beta)(\widetilde{Y}_s)ds\bigg),\quad t\geqslant 0$$

是关于 $\{\mathcal{L}_t,t\geqslant 0\}$ 的 $L^{\beta(\widetilde{Y})}$- 鞅, 这里 $\{\mathcal{L}_t,t\geqslant 0\}$ 是 $\boldsymbol{n}$ 的自然 σ- 域流.

证明 首先注意到

$$L^{\beta(\widetilde{Y})}\bigg[\prod_{i\leqslant n_t}A(\widetilde{Y}_{\zeta_i})\bigg]=\exp\bigg(\int_0^t((A-1)\beta)(\widetilde{Y}_s)ds\bigg), \tag{2.5}$$

这意味着 $L^{\beta(\widetilde{Y})}(\eta_t^{(1)})=1$. 利用 $\boldsymbol{n}$ 的 Markov 性, 容易验证 $\{\eta_t^{(1)},t\geqslant 0\}$ 是 $L^{\beta(\widetilde{Y})}$- 鞅. 这里省略细节. □

利用上面引理, 可以用如下方式定义一个测度 $L^{(A\beta)(\widetilde{Y})}$:

$$\frac{dL^{(A\beta)(\widetilde{Y})}}{dL^{\beta(\widetilde{Y})}}\bigg|_{\mathcal{L}_t}=\prod_{i\leqslant n_t}A(\widetilde{Y}_{\zeta_i})\cdot\exp\bigg(-\int_0^t((A-1)\beta)(\widetilde{Y}_s)ds\bigg).$$

引理 2.3 对任意 $x\in E$ 和 $t\geqslant 0$, 有

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}_x\bigg[\prod_{v<\xi_t}\frac{r^v}{A(\widetilde{Y}_{\zeta^v})}\bigg|\widehat{\mathcal{G}}\bigg]=1. \tag{2.6}$$

证明 利用 (2.2), 在给定 $\widehat{\mathcal{G}}$ 的条件下, 对任意 $v<\xi_t$, 有

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}_x(r^v\mid\widehat{\mathcal{G}})=A(\widetilde{Y}_{\zeta^v}).$$

由于在给定 $\widehat{\mathcal{G}}$ 的条件下, $\{r^v,v<\xi_{n_t}\}$ 是独立的, 所以有

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}_x\bigg(\prod_{v<\xi_t}\frac{r^v}{A(\widetilde{Y}_{\zeta^v})}\bigg|\widehat{\mathcal{G}}\bigg)=1.$$

证毕. □

引理 2.4 (1) 过程

$$\widetilde{\eta}_t^{(1)}:=\prod_{v<\xi_t}A(\widetilde{Y}_{\zeta^v})\cdot\exp\bigg(-\int_0^{t\wedge\zeta^{\dagger-1}}((A-1)\beta)(\widetilde{Y}_s)ds\bigg),\quad t\geqslant 0$$

关于 $\{\widetilde{\mathcal{F}}_t,t\geqslant 0\}$ 是 $\widetilde{\boldsymbol{P}}_x(\cdot\mid\mathcal{G}\vee\sigma(\zeta^{\dagger-1}))$- 鞅.

(2) 过程

$$\widetilde{\eta}_t^{(2)}:=\prod_{v<\xi_t}\frac{r^v}{A(\widetilde{Y}_{\zeta^v})}=\mathbf{1}_{\{\xi_t\in L_t\}}\prod_{v<\xi_t}\frac{r^v}{A(\widetilde{Y}_{\zeta^v})},\quad t\geqslant 0$$

关于 $\{\widetilde{\mathcal{F}}_t,t\geqslant 0\}$ 是 $\widetilde{\boldsymbol{P}}_x(\cdot\mid\widehat{\mathcal{G}})$- 鞅, 这里最后一个等式用到了如下结果: 如果 $\xi_t=\dagger$, 那么对 $v=\dagger-1$ 有 $r^v=0$.

证明 (1) 首先注意到, 如果 $\xi_t\in L_t$, 那么 $\zeta^{\dagger-1}>t$; 如果 $\xi_t=\dagger$, 那么 $\zeta^{\dagger-1}\leqslant t$. 对 $s,t\geqslant 0$, 利用 Markov 性, 有

$$\begin{aligned}&\widetilde{\boldsymbol{P}}_x[\widetilde{\eta}_{t+s}^{(1)}\mid\widetilde{\mathcal{F}}_t\vee\mathcal{G}\vee\sigma(\zeta^{\dagger-1})]\\&\quad=\widetilde{\boldsymbol{P}}_x\bigg[\prod_{v<\xi_{t+s}}A(\widetilde{Y}_{\zeta^v})\cdot\exp\bigg(-\int_0^{(t+s)\wedge\zeta^{\dagger-1}}((A-1)\beta)(\widetilde{Y}_r)dr\bigg)\bigg|\widetilde{\mathcal{F}}_t\vee\mathcal{G}\vee\sigma(\zeta^{\dagger-1})\bigg]\\&\quad=\mathbf{1}_{\{\xi_t\in L_t\}}\prod_{v<\xi_t}A(\widetilde{Y}_{\zeta^v})\cdot\exp\bigg(-\int_0^{t\wedge\zeta^{\dagger-1}}((A-1)\beta)(\widetilde{Y}_r)dr\bigg)\end{aligned}$$

$$\times \widetilde{\boldsymbol{P}}_x\bigg[\prod_{\xi_t\leqslant v<\xi_{t+s}} A(\widetilde{Y}_{\zeta^v})\cdot\exp\bigg(-\int_0^{s\wedge\zeta^{\dagger-1}}((A-1)\beta)(\widetilde{Y}_{r+t})dr\bigg)\bigg|\widetilde{\mathcal{F}}_t\vee\mathcal{G}\vee\sigma(\zeta^{\dagger-1})\bigg]$$

$$+\mathbf{1}_{\{\xi_t=\dagger\}}\prod_{v<\xi_t} A(\widetilde{Y}_{\zeta^v})\cdot\exp\bigg(-\int_0^{t\wedge\zeta^{\dagger-1}}((A-1)\beta)(\widetilde{Y}_r)dr\bigg)$$

$$=\mathbf{1}_{\{\xi_t\in L_t\}}\widetilde{\eta}_t^{(1)}\exp\bigg(-\int_0^{s\wedge\zeta^{\dagger-1}}((A-1)\beta)(\widetilde{Y}_{r+t})dr\bigg)\widetilde{\boldsymbol{P}}^x\bigg[\prod_{\xi_t\leqslant v<\xi_{t+s}} A(\widetilde{Y}_{\zeta^v})\bigg|\mathcal{G}\vee\sigma(\zeta^{\dagger-1})\bigg]$$

$$+\mathbf{1}_{\{\xi_t=\dagger\}}\widetilde{\eta}_t^{(1)}.$$

对于固定的 $t>0$, 给定轨道 $\widetilde{Y}$ 的条件下, 分裂时间点集合 $\{\{\zeta^v:\xi_t\leqslant v<\xi_{t+s}\}:s\geqslant 0\}$ 是具有强度 $\beta(\widetilde{Y}_{t+s})ds$ 的 Poisson 随机测度, 且其率为 $L^{\beta(\widetilde{Y}_{t+\cdot})}$. 由 (2.5) 得

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}_x\bigg[\prod_{\xi_{n_t}\leqslant v<\xi_{t+s}} A(\widetilde{Y}_{\zeta^v})\bigg|\mathcal{G}\vee\sigma(\zeta^{\dagger-1})\bigg]=\exp\bigg(\int_0^{s\wedge\zeta^{\dagger-1}}((A-1)\beta)(\widetilde{Y}_{r+t})dr\bigg).$$

这样有

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}_x[\widetilde{\eta}_{t+s}^{(1)}\mid\widehat{\mathcal{F}}_t\vee\mathcal{G}\vee\sigma(\zeta^{\dagger-1})]=\widetilde{\eta}_t^{(1)}.$$

(2) 对任意 $s,t\geqslant 0$, 利用 Markov 性有

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{P}}_x[\widetilde{\eta}_{t+s}^{(2)}\mid\widetilde{\mathcal{F}}_t\vee\widehat{\mathcal{G}}]&=\widetilde{\boldsymbol{P}}_x\bigg[\prod_{v<\xi_{t+s}}\frac{r^v}{A(\widetilde{Y}_{\zeta^v})}\bigg|\widetilde{\mathcal{F}}_t\vee\widehat{\mathcal{G}}\bigg]\\&=\mathbf{1}_{\{\xi_t\in L_t\}}\prod_{v<\xi_t}\frac{r^v}{A(\widetilde{Y}_{\zeta^v})}\cdot\widetilde{\boldsymbol{P}}_x\bigg[\prod_{\xi_t\leqslant v<\xi_{s+t}}\frac{r^v}{A(\widetilde{Y}_{\zeta^v})}\bigg|\widehat{\mathcal{G}}\bigg]\\&=\widetilde{\eta}_t^{(2)},\end{aligned}$$

这里最后一个等式利用了 (2.6). 这样, 有

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}_x[\widetilde{\eta}_{t+s}^{(2)}\mid\widetilde{\mathcal{F}}_t\vee\widehat{\mathcal{G}}]=\widetilde{\eta}_t^{(2)}.$$

证毕. □

利用 $\{\widetilde{\eta}_t^{(1)},t\geqslant 0\}$ 进行鞅变换的效果是将沿脊柱的分裂速率由 $\beta(\widetilde{Y}_t)$ 变为 $(A\beta)(\widetilde{Y}_t)$. 利用 $\{\widetilde{\eta}_t^{(2)},t\geqslant 0\}$ 进行鞅变换的效果是将后代分布从 $P(\widetilde{Y}_{\zeta_i})=(p_k(\widetilde{Y}_{\zeta_i}))_{k\geqslant 1}$ 变为带偏 (size-biased) 分布

$$\dot{P}(\widetilde{Y}_{\zeta_i})=(\dot{p}_k(Y_{\zeta_i}))_{k\geqslant 1},$$

这里 $\dot{p}_k(y)$ 由下式给出:

$$\dot{p}_k(y)=\frac{kp_k(y)}{A(y)},\quad k\geqslant 1,\quad y\in E.$$

定义

$$\widetilde{\eta}_t^{(3)}(\phi):=\frac{\phi(\widetilde{Y}_{t\wedge\zeta^{\dagger-1}})}{\phi(x)}\exp\bigg(-\int_0^{t\wedge\zeta^{\dagger-1}}(\lambda_1-(A-1)\beta)(\widetilde{Y}_s)ds\bigg),\quad t\geqslant 0.$$

$\{\widetilde{\eta}_t^{(3)}(\phi),t\geqslant 0\}$ 关于 $\{\mathcal{G}_t\vee\sigma(\zeta^{\dagger-1}),\ t\geqslant 0\}$ 是 $\widetilde{\boldsymbol{P}}_x$- 鞅, 同时, 它还是关于 $\{\widetilde{\mathcal{F}}_t,t\geqslant 0\}$ 的一个 $\widetilde{\boldsymbol{P}}_x$- 鞅, 这是因为 $\widetilde{\eta}_t^{(3)}(\phi)$ 可以表示为

$$\widetilde{\eta}_t^{(3)}(\phi)=\sum_{u\in L_t}\phi(x)^{-1}\phi(\widetilde{Y}_t^u)\exp\bigg(-\int_0^t(\lambda_1-(A-1)\beta)(\widetilde{Y}_s)ds\bigg)\mathbf{1}_{\{\xi_t=u\}}$$

$$+\sum_{u\in D_t}\phi(x)^{-1}\phi(\widetilde{Y}^u_{\zeta^u})\exp\bigg(-\int_0^{\zeta^u}(\lambda_1-(A-1)\beta)(\widetilde{Y}_s)ds\mathbf{1}_{\{\dagger-1=u\}}\bigg). \tag{2.7}$$

定义

$$\eta_t(\phi):=\widetilde{\eta}_t^{(1)}\widetilde{\eta}_t^{(2)}\widetilde{\eta}_t^{(3)}(\phi),\quad t\geqslant 0.$$

利用 $\widetilde{\eta}_t^{(1)}$、$\widetilde{\eta}_t^{(2)}$ 和 $\widetilde{\eta}_t^{(3)}(\phi)$ 的定义, 容易验证

$$\widetilde{\eta}_t(\phi)=\mathbf{1}_{\{\xi_t\in L_t\}}\prod_{v<\xi_t}r^v\frac{\phi(\widetilde{Y}_t)}{\phi(x)}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}. \tag{2.8}$$

引理 2.5 $\{\widetilde{\eta}_t(\phi),t\geqslant 0\}$ 关于 $\{\widetilde{\mathcal{F}}_t,t\geqslant 0\}$ 是 $\widetilde{\boldsymbol{P}}_x$- 鞅.

证明 $\{\widetilde{\eta}_t^{(1)},t\geqslant 0\}$ 关于 $\{\widetilde{\mathcal{F}}_t,t\geqslant 0\}$ 是 $\widetilde{\boldsymbol{P}}_x(\cdot\mid\mathcal{G}\vee\sigma(\zeta^{\dagger-1}))$- 鞅, 且 $\{\widetilde{\eta}_t^{(2)},t\geqslant 0\}$ 关于 $\{\widetilde{\mathcal{F}}_t,t\geqslant 0\}$ 是 $\widetilde{\boldsymbol{P}}_x(\cdot\mid\widehat{\mathcal{G}})$- 鞅. 注意到 $\mathcal{G}\vee\sigma(\zeta^{\dagger-1})\subset\widehat{\mathcal{G}}$, 且对任意 $t\geqslant 0$, $\widetilde{\eta}_t^{(1)}\in\widehat{\mathcal{G}}$, $\widetilde{\eta}_t^{(2)}\in\widetilde{\mathcal{F}}_t$. 利用引理 2.1 可知, $\{\widetilde{\eta}_t^{(1)}\widetilde{\eta}_,^{(2)}t\geqslant 0\}$ 关于 $\{\widetilde{\mathcal{F}}_t,t\geqslant 0\}$ 是 $\widetilde{\boldsymbol{P}}_x(\cdot\mid\mathcal{G}\vee\sigma(\zeta^{\dagger-1}))$- 鞅. 注意到 $\widetilde{\eta}_t^{(3)}(\phi)\in\mathcal{G}\vee\sigma(\zeta^{\dagger-1})$ 且对任意 $t\geqslant 0$, $\widetilde{\eta}_t^{(1)}\widetilde{\eta}_t^{(2)}\in\widetilde{\mathcal{F}}_t$. 再次利用引理 2.1, 得到 $\{\widetilde{\eta}_t(\phi)=\widetilde{\eta}_t^{(1)}\widetilde{\eta}_t^{(2)}\widetilde{\eta}_t^{(3)}(\phi),t\geqslant 0\}$ 关于 $\{\widetilde{\mathcal{F}}_t,t\geqslant 0\}$ 是一个 $\widetilde{\boldsymbol{P}}_x$- 鞅. □

引理 2.6 $M_t(\phi)$ 是 $\widetilde{\eta}_t(\phi)$ 在 $\mathcal{F}_t$ 上的投影, 即

$$M_t(\phi)=\widetilde{\boldsymbol{P}}_x(\widetilde{\eta}_t(\phi)\mid\mathcal{F}_t).$$

证明 利用 (2.8) 有

$$\widetilde{\eta}_t(\phi)=\sum_{u\in L_t}\prod_{v<u}r^v\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\phi(x)^{-1}\phi(Y_t^u)\mathbf{1}_{\{\xi_t=u\}}.$$

这样,

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{P}}_x(\widetilde{\eta}_t(\phi)\mid\mathcal{F}_t)&=\sum_{u\in L_t}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\phi(x)^{-1}\phi(Y_t^u)\prod_{v<u}r^v\ \widetilde{\boldsymbol{P}}_x(\mathbf{1}_{\{\xi_t=u\}}\mid\mathcal{F}_t)\\&=\sum_{u\in L_t}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\phi(x)^{-1}\phi(Y_t^u)\\&=M_t(\phi),\end{aligned}$$

这里倒数第二个等号用到了下面结果:

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}_x(\mathbf{1}_{L_t}(u)\mathbf{1}_{\{\xi_t=u\}}\mid\mathcal{F}_t)=\mathbf{1}_{L_t}(u)\mathbf{1}_{\{\xi_t=u\}}\prod_{v<u}\frac{1}{r^v}.$$

证毕. □

现在在 $(\widetilde{\mathcal{T}},\widetilde{\mathcal{F}})$ 上定义概率测度 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x$:

$$\frac{d\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x}{d\widetilde{\boldsymbol{P}}_x}\bigg|_{\widetilde{\mathcal{F}}_t}=\widetilde{\eta}_t(\phi),\quad t\geqslant 0. \tag{2.9}$$

利用 (2.8), 这一定义说明, 在 $\widetilde{\mathcal{F}}_t$ 上有

$$d\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x=\widetilde{\eta}_t(\phi)d\widetilde{\boldsymbol{P}}_x=\mathbf{1}_{\{\xi_t\in L_t\}}\prod_{v<\xi_t}r^v\frac{\phi(\widetilde{Y}_t)}{\phi(x)}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}d\widetilde{\boldsymbol{P}}_x.$$

因此, 对任意 $t \geqslant 0$, $\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x(\xi_t \in L_t) = 1$, 这意味着 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x(\xi_t \in L_t, \forall t \geqslant 0) = 1$. 所以,

$$\begin{aligned}
d\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x &= \mathbf{1}_{\{\xi_t \in L_t\}} \frac{\phi(\widetilde{Y}_t)}{\phi(x)} \exp\bigg(-\int_0^t (\lambda_1 - (A-1)\beta)(\widetilde{Y}_s) ds\bigg) d\Pi_x(\widetilde{Y}) \\
&\quad \times \exp\bigg(-\int_0^t ((A-1)\beta)(\widetilde{Y}_s) ds\bigg) dL^{\beta(\widetilde{Y})} \prod_{v<\xi_t} p_{r^v}(\widetilde{Y}_{\zeta^v}) \prod_{j:\ vj\in O_v} d\boldsymbol{P}^{t-\zeta^v}_{\widetilde{Y}_{\zeta^v}}((\tau, M)^v_j) \\
&= \mathbf{1}_{\{\xi_t \in L_t\}} d\Pi^\phi_x(\widetilde{Y}) dL^{A\beta(\widetilde{Y})}(\boldsymbol{n}) \prod_{v<\xi_t} \frac{p_{r_v}(\widetilde{Y}_{\zeta^v})}{A(\widetilde{Y}_{\zeta^v})} \prod_{j:\ vj\in O_v} d\boldsymbol{P}^{t-\zeta^v}_{\widetilde{Y}_{\zeta^v}}((\tau, M)^v_j) \\
&= \mathbf{1}_{\{\xi_t \in L_t\}} d\Pi^\phi_x(\widetilde{Y}) dL^{A\beta(\widetilde{Y})}(\boldsymbol{n}) \prod_{v<\xi_t} \dot{p}_{r^v}(\widetilde{Y}_{\zeta^v}) \prod_{v<\xi_t} \frac{1}{r^v} \prod_{j:\ vj\in O_v} d\boldsymbol{P}^{t-\zeta^v}_{\widetilde{Y}_{\zeta^v}}((\tau, M)^v_j) \\
&= d\Pi^\phi_x(\widetilde{Y}) dL^{A\beta(\widetilde{Y})}(\boldsymbol{n}) \prod_{v<\xi_t} \dot{p}_{r^v}(\widetilde{Y}_{\zeta^v}) \prod_{v<\xi_t} \frac{1}{r^v} \prod_{j:\ vj\in O_v} d\boldsymbol{P}^{t-\zeta^v}_{\widetilde{Y}_{\zeta^v}}((\tau, M)^v_j).
\end{aligned}$$

从 $\widetilde{\boldsymbol{P}}_x$ 到 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x$ 的测度变换有 3 个效果: 脊柱的运动变为率为 Π^ϕ_x 的 Hunt 过程, 分裂时间的强度变了, 并且后代分布也将变为一个带偏的分布. 确切地, 在 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x$ 下,

(i) 在 0 时刻, 树 τ 的根点在 x 处, 且脊柱过程 $\widetilde{Y}_t$ 按率 Π^ϕ_x 在空间运动;

(ii) 给定脊柱的轨道 $\widetilde{Y}$, 沿脊柱的分裂时间的率为 $L^{(A\beta)(\widetilde{Y})}$, 这里 $L^{(A\beta)(\widetilde{Y})}$ 是具有强度 $(A\beta)(\widetilde{Y}_t)dt$ 的 Poisson 随机测度的率;

(iii) 在脊柱上粒子 v 的分裂时刻, v 被 r^v 个后代代替, 这里 r^v 是随机变量, 其分布为 $\dot{P}(\widetilde{Y}_{\zeta^v}) := (\dot{p}_k(\widetilde{Y}_{\zeta^v}))_{k\geqslant 1}$;

(iv) 随机地从 v 的分裂时刻产生的 r^v 个后代中选取一个粒子作为脊柱上粒子;

(v) 如果 $r^v \geqslant 2$, 剩余的 $r^v - 1$ 个粒子 $vj \in O_v$ 独立地生成子树 $(\tau, M)^v_j$, 这些子树的率由推移到其出生时刻的 $\boldsymbol{P}_{\widetilde{Y}_{\zeta^v}}$ 决定.

在 $(\widetilde{\mathcal{T}}, \mathcal{F})$ 上定义如下概率测度 $\boldsymbol{Q}_x$:

$$\boldsymbol{Q}_x := \widetilde{\boldsymbol{Q}}_x|_{\mathcal{F}}.$$

定理 2.2 (脊柱分解) $\boldsymbol{Q}_x$ 是通过鞅 $\{M_t(\phi), t \geqslant 0\}$ 对 $\boldsymbol{P}_x$ 进行的一个鞅变换, 即对任意 $t > 0$, 有

$$\frac{d\boldsymbol{Q}_x}{d\boldsymbol{P}_x}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = M_t(\phi).$$

证明 上面结果实际上可以由一个更一般性的结果得到: 如果 $\widetilde{\mu}_1$ 是 $\widetilde{\mu}_2$ 定义在空间 $(\Omega, \widetilde{\mathcal{S}})$ 上的两个概率测度, 具有 Radon-Nikodym 导数

$$\frac{d\widetilde{\mu}_2}{d\widetilde{\mu}_1} = f,$$

且如果 $\mathcal{S}$ 是 $\widetilde{\mathcal{S}}$ 的子 σ- 域, 那么定义在 $(\Omega, \mathcal{S})$ 上的两个测度 $\mu_1 := \widetilde{\mu}_1|_S$ 与 $\mu_2 := \widetilde{\mu}_2|_S$ 有下面的条件数学期望联系:

$$\frac{d\mu_2}{d\mu_1} = \widetilde{\mu}_1(f \mid \mathcal{S}).$$

对任意固定的 $t > 0$, 对 $(\Omega, \widetilde{\mathcal{S}}) = (\widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathcal{F}}_t)$, $\mathcal{S} = \mathcal{F}_t$, $\widetilde{\mu}_2 = \widetilde{\boldsymbol{Q}}_x$, $\widetilde{\mu}_1 = \widetilde{\boldsymbol{P}}_x$, 利用上面的结果, 并利用引理 2.6 即得所需结果. □

仍然用 $X_t(B)$ 表示具有脊柱的带标记树上 t 时刻存活且位于 $B\in\mathcal{B}(E)$ 的粒子数. 注意到

$$X_t(B)=\mathbf{1}_B(\widetilde{Y}_t)+\sum_{u\in L_t,u\neq\xi_t}\mathbf{1}_B(Y_t^u).$$

$\{u\in L_t,u\neq\xi_t\}$ 中粒子可以被分解为在脊柱的分裂时间产生的一些子树上的粒子, 并可以被看成是沿脊柱的移民. 可以用移民的语言来叙述系统: 在 $\boldsymbol{Q}_x$ 下, (i) 脊柱过程在 0 时刻从 x 点出发, 并按率 Π_x^{ϕ} 在空间运动, 所以其寿命为无穷; (ii) 给定脊柱轨道 $\widetilde{Y}$. 的条件下, 沿脊柱的分解时间的率为 $L^{(A\beta)(\widetilde{Y})}$; (iii) 在脊柱上粒子 v 的分裂时刻, 有 r^v-1 个粒子移民到位置 $\widetilde{Y}_{\zeta^v}$, 这里 r^v 是随机变量, 其分布为 $\dot{P}(\widetilde{Y}_{\zeta^v}):=(\dot{p}_k(\widetilde{Y}_{\zeta^v}))_{k\geqslant1}$; (iv) 每一个被移民进来的粒子, 独立地产生子树, 子树的率由推移到其出生时刻的 $\boldsymbol{P}_{\widetilde{Y}_{\zeta^v}}$ 决定. 上面定理 2.2 说明 $\boldsymbol{Q}_x$ 是 $\boldsymbol{P}_x$ 的鞅变换后的测度, 其中使用的鞅为 $\{M_t(\phi),t\geqslant0\}$.

定理 2.3 鞅 $\{M_t(\phi),t\geqslant0\}$ 有如下的分解:

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x[\phi(x)M_t(\phi)\mid\widetilde{\mathcal{G}}]=\phi(\widetilde{Y}_t)\mathrm{e}^{-\lambda_1t}+\sum_{u<\xi_t}(r^u-1)\phi(\widetilde{Y}_{\zeta^u})\mathrm{e}^{-\lambda_1\zeta^u}.\tag{2.10}$$

证明 首先将 $\{\phi(x)M_t(\phi),t\geqslant0\}$ 分解为

$$\phi(x)M_t(\phi)=\mathrm{e}^{-\lambda_1t}\phi(\widetilde{Y}_t)+\mathrm{e}^{-\lambda_1t}\sum_{u\in L_t,u\neq\xi_t}\phi(Y_t^u).$$

粒子 $\{u\in L_t,u\neq\xi_t\}$ 可以被分解为在脊柱的分裂时间产生的子树上的粒子, 也就是说, 脊柱 ξ 上任意粒子 $u<\xi_t$ 在时间 ζ^u 产生 r^u 个后代, 其中一个被随机选为脊柱上粒子, 剩余 r^u-1 个粒子独立地生成子树 $(\tau,M)_j^u$. 令

$$X_t^j=\sum_{v\in L_t,v\in(\tau,M)_j^u}\delta_{Y_t^v}(\cdot),\quad t\geqslant\zeta^u.$$

$\{X_t^j,t\geqslant\zeta^u\}$ 是 (Y,β,ψ)- 分枝 Hunt 过程, 其出生时间为 ζ^u, 出发点为 $\widetilde{Y}_{\zeta^u}$. 从而,

$$\phi(x)M_t(\phi)=\mathrm{e}^{-\lambda_1t}\phi(\widetilde{Y}_t)+\sum_{u<\xi_t}\sum_{j:\ uj\in O_u}M_t^{u,j}(\phi)\phi(\widetilde{Y}_{\zeta^u})\mathrm{e}^{-\lambda_1\zeta^u},\tag{2.11}$$

这里

$$M_t^{u,j}(\phi):=\mathrm{e}^{-\lambda_1(t-\zeta^u)}\frac{\langle\phi,X_{t-\zeta^u}^j\rangle}{\phi(\widetilde{Y}_{\zeta^u})}.$$

根据定义 (2.9), 在给定 $\widetilde{\mathcal{G}}$ 的条件下, $uj\in O_v$ 独立地按时间推移到其出生时刻 ζ^u 的概率测度 $\boldsymbol{P}_{\widetilde{Y}_{\zeta^u}}$ 产生子树. 所以, 在给定 $\widetilde{\mathcal{G}}$ 的条件下, $\{M_t^{u,j}(\phi),t\geqslant0\}$ 是子树 $(\tau,M)_j^u$ 上的 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x$- 鞅, 从而,

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x(M_t^{u,j}(\phi)\mid\widetilde{\mathcal{G}})=1.$$

这样, 对 (2.11) 关于测度 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x$ 取条件期望得

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x[\phi(x)M_t(\phi)\mid\widetilde{\mathcal{G}}]=\phi(\widetilde{Y}_t)\mathrm{e}^{-\lambda_1t}+\sum_{u<\xi_t}(r^u-1)\phi(\widetilde{Y}_{\zeta^u})\mathrm{e}^{-\lambda_1\zeta^u}.$$

证毕. □

定理 2.4 对任意 $u\in\Gamma$, 有

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x(\xi_t=u\mid\mathcal{F}_t)=\mathbf{1}_{\{u\in L_t\}}\frac{\phi(Y_t^u)}{\langle\phi,X_t\rangle}.$$

证明　只需证明, 对任意 $B \in \mathcal{F}_t$, 有

$$\int_B \mathbf{1}_{\{\xi_t=u\}} d\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x = \int_B \mathbf{1}_{\{u\in L_t\}} \frac{\phi(Y_t^u)}{\langle \phi, X_t\rangle} d\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x.$$

根据 (2.9) 的定义, 可得

$$\begin{aligned}\int_B \mathbf{1}_{\{\xi_t=u\}} d\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x &= \int_B \mathbf{1}_{\{\xi_t=u\}} \mathbf{1}_{\{\xi_t\in L_t\}} \prod_{v<\xi_t} r^v \frac{\phi(\widetilde{Y}_t)}{\phi(x)} \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} d\widetilde{\boldsymbol{P}}_x \\ &= \int_B \mathbf{1}_{\{\xi_t=u\}} \mathbf{1}_{\{u\in L_t\}} \prod_{v<u} r^v \frac{\phi(Y_t^u)}{\phi(x)} \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} d\widetilde{\boldsymbol{P}}_x.\end{aligned}$$

根据 (2.3), 可得

$$\int_B \mathbf{1}_{\{\xi_t=u\}} d\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x = \int_B \mathbf{1}_{\{u\in L_t\}} \frac{\phi(Y_t^u)}{\phi(x)} \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} d\boldsymbol{P}_x.$$

由定理 2.2 知, 对任意 $A \in \mathcal{F}_t$, 有

$$\boldsymbol{P}_x(A \cap (M_t(\phi) > 0)) = \boldsymbol{P}_x\left(\frac{M_t(\phi)}{M_t(\phi)}, A \cap (M_t(\phi) > 0)\right) = \boldsymbol{Q}_x\left(\frac{1}{M_t(\phi)}, A\right).$$

由于 $\{u \in L_t\} \subset \{M_t(\phi) > 0\}$, 因此有

$$\int_B \mathbf{1}_{\{\xi_t=u\}} d\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x = \int_B \mathbf{1}_{\{u\in L_t\}} \frac{\phi(Y_t^u)}{\langle \phi, X_t\rangle} d\boldsymbol{Q}_x.$$

证毕. □

作为上面结果的推论, 有下面两个结果.

推论 2.1　如果

$$f = \sum_{u\in L_t} f^u(\tau, M) \mathbf{1}_{\{\xi_t=u\}},$$

这里 $f^u \in \mathcal{F}_t$, 那么, 在 $L_t \neq \emptyset$ 上,

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x(f \mid \mathcal{F}_t) = \sum_{u\in L_t} f_u \frac{\phi(Y_t^u)}{\langle \phi, X_t\rangle}.$$

推论 2.2　如果 g 是 E 上 Borel 可测函数, 那么,

$$\langle g\phi, X_t\rangle = \widetilde{\boldsymbol{Q}}_x(g(\widetilde{Y}_t) \mid \mathcal{F}_t) \langle \phi, X_t\rangle.$$

证明　利用 $g(\widetilde{Y}_t) = \sum_{u\in L_t} g(Y_t^u) \mathbf{1}_{\{\xi_t=u\}}$, 并利用推论 2.1, 很容易得到所需结论. □

3　应用

3.1　上临界分枝 Hunt 过程的 $L\log L$ 准则

本小节利用脊柱分解证明上临界分枝 Hunt 过程的 $L\log L$ 定理, 不需要假设每个粒子至少产生 1 个后代.

假设 $\{\widehat{P}_t, t \geqslant 0\}$ 是 $\{P_t, t \geqslant 0\}$ 在 $L^2(E,m)$ 意义下的对偶半群, 即

$$\int_E f(x)P_t g(x)m(dx) = \int_E g(x)\widehat{P}_t f(x)m(dx), \quad f,g \in L^2(E,m).$$

用 $\boldsymbol{A}$ 与 $\widehat{\boldsymbol{A}}$ 分别表示半群 $\{P_t\}$ 与 $\{\widehat{P}_t\}$ 在 $L^2(E,m)$ 意义下的生成元.

假设 3.1 (i) 存在一族严格正的 $E\times E$ 上连续函数 $\{p(t,\cdot,\cdot); t>0\}$, 使得对任意 $(t,x) \in (0,\infty)\times E$ 和 $f \in \mathcal{B}^+(E)$, 有

$$P_t f(x) = \int_E p(t,x,y)f(y)m(dy), \quad \widehat{P}_t f(x) = \int_E p(t,y,x)f(y)m(dy).$$

(ii) 半群 $\{P_t\}$ 与 $\{\widehat{P}_t\}$ 是超压缩的, 即对任意 $t>0$, 存在 $c_t>0$ 使得

$$p(t,x,y) \leqslant c_t, \quad 对任意\ (x,y) \in E\times E.$$

令 $\{\widehat{P}_t^{(1-A)\beta}, t \geqslant 0\}$ 表示 $\{P_t^{(1-A)\beta}, t \geqslant 0\}$ 在 $L^2(E,m)$ 的对偶半群. 在假设 3.1 下, 可以证明半群 $\{P_t^{(1-A)\beta}\}$ 与 $\{\widehat{P}_t^{(1-A)\beta}\}$ 是 $L^2(E,m)$ 上强连续半群, 并且存在一族 $E\times E$ 上的严格正的连续函数 $\{p^{(1-A)\beta}(t,\cdot,\cdot); t>0\}$ 使得对任意 $(t,x)\in(0,\infty)\times E$ 与 $f\in\mathcal{B}^+(E)$, 有

$$\begin{aligned}
P_t^{(1-A)\beta}f(x) &= \int_E p^{(1-A)\beta}(t,x,y)f(y)m(dy),\\
\widehat{P}_t^{(1-A)\beta}f(x) &= \int_E p^{(1-A)\beta}(t,y,x)f(y)m(dy).
\end{aligned}$$

$\{P_t^{(1-A)\beta}\}$ 与 $\{\widehat{P}_t^{(1-A)\beta}\}$ 的生成元可以分别写为 $\mathcal{A}+(A-1)\beta$ 与 $\widehat{\mathcal{A}}+(A-1)\beta$.

令 $\sigma(\mathcal{A}+(A-1)\beta)$ 与 $\sigma(\widehat{\mathcal{A}}+(A-1)\beta)$ 分别表示算子 $\mathcal{A}+(A-1)\beta$ 与 $\widehat{\mathcal{A}}+(A-1)\beta$ 的谱. 由 Jentzch 定理 (参见文献 [25, 第 333 页,定理 V.6.6]) 以及 $\{P_t^{(1-A)\beta}\}$ 与 $\{\widehat{P}_t^{(1-A)\beta}\}$ 的强连续性知, 共同值 $\lambda_1 := \sup\mathrm{Re}(\sigma(\mathcal{A}+(A-1)\beta)) = \sup\mathrm{Re}(\sigma(\widehat{\mathcal{A}}+(A-1)\beta))$ 是 $\mathcal{A}+(A-1)\beta$ 与 $\widehat{\mathcal{A}}+(A-1)\beta$ 的重度为 1 的特征值, 并且存在 $\mathcal{A}+(A-1)\beta$ 的对应于特征值 λ_1 的几乎处处严格正的特征函数 ϕ, 以及 $\widehat{\mathcal{A}}+(A-1)\beta$ 的对应于特征值 λ_1 的几乎处处严格正的特征函数 $\widehat{\phi}$. 根据文献 [26, 命题 2.3] 可知, ϕ 与 $\widehat{\phi}$ 是 E 上严格正的连续函数. 选取 ϕ 与 $\widehat{\phi}$ 使得 $\int_E \phi^2(x)m(dx) = \int_E \phi(x)\widehat{\phi}(x)m(dx) = 1$, 则

$$\phi(x) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}P_t^{(1-A)\beta}\phi(x), \quad \widehat{\phi}(x) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\widehat{P}_t^{(1-A)\beta}\widehat{\phi}(x), \quad x\in E. \tag{3.1}$$

所以假设 3.1 成立意味着假设 1.1 成立, 从而可以对 Π_x $(x\in E)$, 作鞅变换得到 Π_x^ϕ, 见 (1.7). 过程 $\{Y,\ \Pi_x^\phi\}$ 是保守的 Markov 过程, 并且 $\phi\widehat{\phi}$ 是半群 $P_t^{(1-A)\beta}$ 的唯一不变概率密度, 即对任意 $f\in\mathcal{B}^+(E)$ 和 $t\geqslant 0$, 有

$$\int_E \phi(x)\widehat{\phi}(x)P_t^{(1-A)\beta}f(x)m(dx) = \int_E f(x)\phi(x)\widehat{\phi}(x)m(dx).$$

令 $p^\phi(t,x,y)$ 表示在 Π_x^ϕ 下 Y 在 E 中的转移密度, 则

$$p^\phi(t,x,y) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}}{\phi(x)}\ p^{(1-A)\beta}(t,x,y)\phi(y).$$

本小节还假设下面的假设成立.

假设 3.2 半群 $\{P_t^{(1-A)\beta}\}$ 与 $\{\widehat{P}_t^{(1-A)\beta}\}$ 是内超压缩的, 即对任意 $t>0$, 存在常数 c_t 使得

$$p^{(1-A)\beta}(t,x,y) \leqslant c_t\phi(x)\widehat{\phi}(y), \quad x,y\in E.$$

由文献 [26, 定理 2.8] 知,

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}p^{(1-A)\beta}(t,x,y)}{\phi(x)\widehat{\phi}(y)}-1\right|\leqslant c\,\mathrm{e}^{-\nu t},\quad x\in E \tag{3.2}$$

对正常数 c 与 ν 成立. 上式等价于

$$\sup_{x\in E}\left|\frac{p^{\phi}(t,x,y)}{\phi(y)\widehat{\phi}(y)}-1\right|\leqslant c\,\mathrm{e}^{-\nu t}. \tag{3.3}$$

这样, 对任意 $f\in\mathcal{B}_b^+(E)$, 有

$$\sup_{x\in E}\left|\int_E p^{\phi}(t,x,y)f(y)m(dy)-\int_E \phi(y)\widehat{\phi}(y)f(y)m(dy)\right|\leqslant c\,\mathrm{e}^{-\nu t}\int_E \phi(y)\widehat{\phi}(y)f(y)m(dy).$$

从而有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_E p^{\phi}(t,x,y)f(y)m(dy)}{\int_E \phi(y)\widehat{\phi}(y)f(y)m(dy)}=1,\quad \text{对 } f\in\mathcal{B}_b^+(E) \text{ 和 } x\in E \text{ 一致成立.} \tag{3.4}$$

假设 3.3　$\lambda_1>0$.

假设 3.3 假设分枝 Hunt 过程是上临界的. 有很多 Hunt 过程满足假设 3.1 与 3.2, 参见文献 [9, 注 1.4].

本小节的目的是将 Kesten-Stigum 的 $L\log L$ 定理的概率证明推广到不需要假设单个粒子至少产生 1 个后代的情形. 令

$$l(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k\phi(x)\log^{+}(k\phi(x))p_k(x),\quad x\in E. \tag{3.5}$$

本小节的主要结果如下:

定理 3.1　假设 $\{X_t;t\geqslant 0\}$ 是一个 (Y,β,ψ)- 分枝 Hunt 过程, 且假设 3.1–3.3 成立, 则对任意非零测度 $\mu\in\boldsymbol{M}_p(E)$, $M_\infty(\phi)$ 在 $\boldsymbol{P}_\mu$ 下非退化的充要条件是

$$\int_E\widehat{\phi}(x)\beta(x)l(x)m(dx)<\infty, \tag{3.6}$$

这里 l 由 (3.5) 定义.

为了证明上面结论, 先给出两个引理. 第一个引理来自文献 [27, 定理 4.3.3].

引理 3.1　假设 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 是可测空间 $(\Omega,\mathcal{F}_\infty)$ 上两个概率测度, $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是此空间上的 σ- 域流, 且存在某个非负鞅 $\{Z_t,t\geqslant 0\}$ 使得

$$\left.\frac{d\boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{P}}\right|_{\mathcal{F}_t}=Z_t,$$

则极限 $Z_\infty:=\limsup_{t\to\infty}Z_t$ 关于 $\boldsymbol{P}$ 几乎必然存在且有限. 进一步, 对任意 $F\in\mathcal{F}_\infty$, 有

$$\boldsymbol{Q}(F)=\int_F Z_\infty d\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}(F\cap\{Z_\infty=\infty\}),$$

从而,

$$\text{(a)}\quad \boldsymbol{P}(Z_\infty=0)=1\Leftrightarrow\boldsymbol{Q}(Z_\infty=\infty)=1,$$

$$\text{(b)}\quad \int Z_\infty d\boldsymbol{P}=\int Z_0 d\boldsymbol{P}\Leftrightarrow\boldsymbol{Q}(Z_\infty<\infty)=1.$$

现在给出另一个引理, 此引理是证明定理 3.1 的关键. 为了叙述这个引理, 需要再引入一些记号. 注意到

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x(\xi_t \neq \dagger, \forall\, t > 0) = 1,$$

从而脊柱的寿命是 ∞. 可以选取一列遗传线 $\xi = \{\xi_0 = \emptyset,\ \xi_1, \xi_2, \dots\}$, 这里 $\xi_{n+1} \in \tau$ 是 $\xi_n \in \tau$ $(n = 0, 1, \dots)$ 的一个后代, 使得 $\xi_t = \xi_{n_t}$, $t \geqslant 0$. 在 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x$ 下, 且给定 $\widetilde{\mathcal{G}}$ 的条件下, $N_t := \{\{(\zeta^{\xi_i},\ r^{\xi_i}) : i = 0, 1, 2, \dots, n_t - 1\} : t \geqslant 0\}$ 是强度为 $(A\beta)(\widetilde{Y}_t)dtd\dot{P}(\widetilde{Y}_t)$ 的 Poisson 点过程, 这里对任意 $y \in E$, $\dot{P}(y)$ 是 $P(y)$ 的带偏分布. 为了简化记号, ζ^{ξ_i} 与 r^{ξ_i} 被分别简记为 ζ_i 与 r_i.

引理 3.2 (1) 若 $\int_E \widehat{\phi}(y)\beta(y)l(y)m(dy) < \infty$, 则

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_1 \zeta_i} r_i \phi(\widetilde{Y}_{\zeta_i}) < \infty, \quad \widetilde{\boldsymbol{Q}}_x\text{-a.s.};$$

(2) 若 $\int_E \widehat{\phi}(y)\beta(y)l(y)m(dy) = \infty$, 则

$$\limsup_{i\to\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_1 \zeta_i} r_i \phi(\widetilde{Y}_{\zeta_i}) = \infty, \quad \widetilde{\boldsymbol{Q}}_x\text{-a.s.}$$

上面结果的证明与文献 [9, 引理 3.2] 的证明完全相似, 这里省略细节.

定理 3.1 证明 定理证明很强地依赖于分解 (2.10).

当 $\int_E \widehat{\phi}(x)\beta(x)l(x)m(dx) < \infty$ 时, 由引理 3.2(1) 得知,

$$\sup_{t>0} \widetilde{\boldsymbol{Q}}_x[\phi(x)M_t(\phi) \mid \widetilde{\mathcal{G}}] \leqslant \sum_{u\in\xi} r^u \phi(\widetilde{Y}_{\zeta^u})\mathrm{e}^{-\lambda_1 \zeta^u} + \|\phi\|_\infty < \infty.$$

利用关于条件概率的 Fatou 引理可知, $\liminf_{t\to\infty} M_t(\phi) < \infty$, $\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x$-a.s. Radon-Nikodym 导数结果告诉我们, 在 $\boldsymbol{Q}_x$ 下, $\{M_t(\phi)^{-1}, t \geqslant 0\}$ 是一个非负上鞅, 从而存在 $\boldsymbol{Q}_x$- 几乎必然意义下有限的极限. 所以, $\lim_{t\to\infty} M_t(\phi) = M_\infty < \infty$, $\boldsymbol{Q}_x$-a.s. 由引理 3.1 知, 在这种情形下,

$$\boldsymbol{P}_x[M_\infty(\phi)] = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P}_x[M_t(\phi)] = 1.$$

当 $\int_E \widehat{\phi}(x)\beta(x)l(x)m(dx) = \infty$ 时, 利用引理 3.2(2) 有, 在测度 $\widetilde{\boldsymbol{Q}}_x$ 下,

$$\limsup_{t\to\infty} \phi(x)M_t(\phi) \geqslant \limsup_{t\to\infty} \phi(\widetilde{Y}_{\zeta_{n_t}})(r_{n_t} - 1)\mathrm{e}^{-\lambda_1 \zeta_{n_t}} = \infty.$$

这说明 $M_\infty(\phi) = \infty, \boldsymbol{Q}_x$-a.s. 再次使用引理 3.1, 有 $M_\infty(\phi) = 0$, $\boldsymbol{P}_x$-a.s. 证毕. □

定理 3.2 假设 $\{X_t; t \geqslant 0\}$ 是一个 (Y, β, ψ)- 分枝 Hunt 过程, 且假设 3.1–3.3 成立. 若 (3.6) 成立, 则存在具有全概率的 $\Omega_0 \subset \Omega$ (即对任意 $x \in E$, $\boldsymbol{P}_x(\Omega_0) = 1$), 使得对任意 $\omega \in \Omega_0$, 及任意 E 上有界具有紧支撑且其不连续点全体是 m 零测集的 Borel 可测函数 f, 有

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\langle f, X_t\rangle = M_\infty(\phi)\int_E \widehat{\phi}(x)f(x)m(dx).$$

利用定理 2.2 和 3.1 可知, 文献 [20] 中的证明适用. 详细证明省略.

3.2 临界分枝 Hunt 过程的 Kolmogorov 型定理

本小节利用脊柱分解定理给出临界分枝 Hunt 过程的 Kolmogorov 型定理的证明, 见下面的定理 3.3. 证明的关键是下面的引理 3.4, 此引理说明, 研究当 $t\to\infty$ 时的极限 $\frac{t\boldsymbol{P}_x(\langle\phi,X_t\rangle>0)}{\phi(x)}$ 等价于研究当 $t\to\infty$ 时的极限 $\int_E t\boldsymbol{P}_x(\langle\phi,X_t\rangle>0)\widehat{\phi}(x)m(dx)$. 引理 3.4 的证明需要用到脊柱分解.

本小节设假设 3.1 与 3.2 成立. 假设 λ_1、ϕ 和 $\widehat{\phi}$ 的定义与第 3.1 小节一样. 令

$$V(x):=\psi''(x,1)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)p_k(x),\quad x\in E,\tag{3.7}$$

$$\sigma^2:=\int_E\beta(y)V(y)\phi^2(y)\widehat{\phi}(y)m(dy).\tag{3.8}$$

假设 Ψ 为定义在 $\mathcal{B}_E^+$ 上的算子, 其定义为

$$(\Psi f)(x):=\psi(x,f(x)),\quad f\in\mathcal{B}^+(E),\quad x\in E.$$

注意, f 通过定义 $f(\Delta)=0$ 自动延拓为 E_Δ 上函数. 对 $f\in\mathcal{B}^+(E)$, 令

$$V_t(\mathrm{e}^{-f})(x):=\boldsymbol{P}_x(\exp\langle -f,X_t\rangle),\quad t\geqslant 0,\quad x\in E,$$

则 (1.4) 可以写为

$$V_t(\mathrm{e}^{-f})(x)=P_t(\mathrm{e}^{-f}\mathbf{1}_E)(x)+\Pi_x(t\geqslant\zeta)+\int_0^t P_r[(\Psi(V_{t-r}(\mathrm{e}^{-f}))-V_{t-r}(\mathrm{e}^{-f}))\beta](x)ds,$$

这里使用了 $\beta(\Delta)=0$ 的事实. 注意到

$$1=\Pi_x(t<\zeta)+\Pi_x(t\geqslant\zeta)=P_t\mathbf{1}_E(x)+\Pi_x(t\geqslant\zeta),$$

所以有

$$1-V_t(\mathrm{e}^{-f})(x)=P_t((1-\mathrm{e}^{-f})\mathbf{1}_E)(x)+\int_0^t P_r[(-\Psi(V_{t-r}(\mathrm{e}^{-f}))+V_{t-r}(\mathrm{e}^{-f}))\beta](x)ds.$$

上式可以改写为

$$\begin{aligned}1-V_t(\mathrm{e}^{-f})(x)=P_t((1-\mathrm{e}^{-f})\mathbf{1}_E)(x)+\int_0^t P_r[(AV_{t-r}(\mathrm{e}^{-f})+1-A\\-\Psi(V_{t-r}(\mathrm{e}^{-f}))+(A-1)(1-V_{t-r}(\mathrm{e}^{-f})))\beta](x)ds,\end{aligned}$$

从而等价于

$$\begin{aligned}1-V_t(\mathrm{e}^{-f})(x)=P_t^{(1-A)\beta}((1-\mathrm{e}^{-f})\mathbf{1}_E)(x)\\+\int_0^t P_r^{(1-A)\beta}[(AV_{t-r}(\mathrm{e}^{-f})+1-A-\Psi(V_{t-r}(\mathrm{e}^{-f})))\beta]ds.\end{aligned}\tag{3.9}$$

首先考虑

$$v_t(x):=\boldsymbol{P}_x(X_t(E)=0),\quad t>0,\quad x\in E$$

的极限行为. 根据单调收敛定理, 有

$$v_t(x) = \lim_{\theta\to\infty} V_t(\mathrm{e}^{-\theta\mathbf{1}_E})(x), \quad t>0, \quad x\in E.$$

利用 X 的 Markov 性, 有

$$\begin{aligned} V_t v_s(x) &= \boldsymbol{P}_x[\mathrm{e}^{\langle X_t, \log\lim_{\theta\to\infty} V_s(\mathrm{e}^{-\theta\mathbf{1}_E})\rangle}] = \lim_{\theta\to\infty} \boldsymbol{P}_x[\mathrm{e}^{\langle X_t, \log V_s(\mathrm{e}^{-\theta\mathbf{1}_E})\rangle}] \\ &= \lim_{\theta\to\infty} V_t V_s(\mathrm{e}^{-\theta\mathbf{1}_E})(x) = v_{t+s}(x), \quad s,t>0, \quad x\in E. \end{aligned} \tag{3.10}$$

利用 (3.9)、(3.10) 和 $f=-\log v_s$, 得到

$$\begin{aligned} 1-v_{t+s}(x) &= P_t^{(1-A)\beta}((1-v_s)\mathbf{1}_E)(x) \\ &\quad + \int_0^t P_r^{(1-A)\beta}[(Av_{t-r+s}+1-A-\Psi(v_{t-r+s}))\beta](x)ds. \end{aligned} \tag{3.11}$$

定义

$$v_\infty(x) := \lim_{t\to\infty} v_t(x) = \boldsymbol{P}_x \quad (\exists\, t>0 \text{ 使得 } X_t(E)=0).$$

注意 V 与 σ^2 由 (3.7) 与 (3.8) 定义.

假设 3.4 (i) 分枝 Hunt 过程 X 是临界的, 即 $\lambda_1=0$;

(ii) $\sigma^2>0$;

(iii) 函数 $\phi V: x\to\phi(x)V(x)$ 在 E 上有界.

引理 3.3 若假设 3.1、3.2 、3.4(i) 和 3.4(ii) 成立, 则对任意 $x\in E$, 有

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\in E}\frac{\boldsymbol{P}_x(X_t(E)>0)}{\phi(x)} = 0. \tag{3.12}$$

证明 对任意 $f,g\in\mathcal{B}^+(E)$, 用 $\langle f,g\rangle_m$ 表示 $\int_E f(x)g(x)m(dx)$. 在假设 3.2 下, $\langle 1,\widehat{\phi}\rangle_m<\infty$. 事实上, 根据 (3.2) 可知, 对任意足够大的 $t>0$, 存在一个 $c_t'>0$ 使得

$$\widehat{\phi}(y) \leqslant q(t,x,y)(c_t')^{-1}\phi^{-1}(x),$$

从而知道, 作为 y 的函数, 上式右端关于 m 可积. 对 (3.9) 关于 $\widehat{\phi}(x)m(dx)$ 积分, 得到

$$\langle 1-v_{t+s},\widehat{\phi}\rangle_m = \langle 1-v_s,\widehat{\phi}\rangle_m + \int_0^t \langle (Av_{t-r+s}+1-A-\Psi(v_{t-r+s}))\beta,\widehat{\phi}\rangle_m ds. \tag{3.13}$$

令 $s\to\infty$, 则有

$$\langle 1-v_\infty,\widehat{\phi}\rangle_m = \langle 1-v_\infty,\widehat{\phi}\rangle_m + t\langle (Av_\infty+1-A-\Psi(v_\infty))\beta,\widehat{\phi}\rangle_m.$$

这样, 有

$$\langle Av_\infty+1-A-\Psi(v_\infty),\beta\widehat{\phi}\rangle_m = 0.$$

容易验证, 对任意 $x\in E$, 有 $Az+1-A-\psi(x,z)\leqslant 0$, $\forall\, z\in[0,1]$. 由于在 E 上 $\widehat{\phi}(x)>0$, 一定有, 在 $\{x\in E,\beta(x)>0\}$ 上,

$$Av_\infty+1-A-\Psi(v_\infty)=0, \quad m\text{-a.e.} \tag{3.14}$$

在 (3.11) 中令 $s\to\infty$, 得到

$$1-v_\infty(x)=P_t^{(1-A)\beta}((1-v_\infty)\mathbf{1}_E)(x)+\int_0^t P_s^{(1-A)\beta}[(Av_\infty+1-A-\psi(v_\infty))\beta](x)ds,$$

从而 $1-v_\infty(x)=P_t^{(1-A)\beta}((1-v_\infty)\mathbf{1}_E)(x)$, 这说明 $1-v_\infty$ 是 $\mathcal{A}+(A-1)\beta$ 的对应于特征值 $\lambda_1=0$ 的特征函数. 由于特征值 $\lambda_1=0$ 是简单的, 因此必定存在常数 c 使得在 E 上 $1-v_\infty=c\phi$. 注意到对任意固定的 $x\in E$, 函数 $\psi_0(x,z):=\psi(x,z)-A(x)z+A(x)-1$ 关于 $z\in(0,1)$ 是严格减函数, $\psi_0(x,1)=0$ 且 $\psi_0(x,0)=\sum_{k=2}^\infty(k-1)p_k(x)\geqslant 0$. 由假设 3.4(ii) 知, $m(\{x\in E;\beta(x)>0,\psi_0(x,0)>0\})>0$. 因为 v_∞ 满足 (3.14), 所以必定有 $c=0$, 或者等价地有 $v_\infty\equiv 1$. 这样,

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{P}_x(X_t(E)>0)=1-v_\infty(x)=0,\quad x\in E.$$

利用 (3.11) 和 (3.2), 有

$$1-v_{t+s}(x)\leqslant P_t^{(1-A)\beta}((1-v_s)\mathbf{1}_E)(x)\leqslant(1+c\mathrm{e}^{-\nu t})\phi(x)\int_E\widehat{\phi}(y)(1-v_s)(y)m(dy),$$

这意味着

$$\frac{1-v_{t+s}(x)}{\phi(x)}\leqslant(1+c\mathrm{e}^{-\nu t})\int_E\widehat{\phi}(y)(1-v_s)(y)m(dy).$$

利用 v_t 关于 t 的单调性, 得到 (3.12). □

下面 Kolmogorov 型定理是本小节的主要结果.

定理 3.3 若假设 3.1、3.2 和 3.4 成立, 则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t\boldsymbol{P}_x(\langle\phi,X_t\rangle>0)}{\phi(x)}=\frac{2}{\sigma^2}\tag{3.15}$$

关于 $x\in E$ 一致成立.

通过证明两个引理来证明上面定理. 定义

$$b(t):=\int_E(1-v_t(x))\widehat{\phi}(x)m(dx)=\int_E\boldsymbol{P}_x(X_t(E)>0)\widehat{\phi}(x)m(dx).\tag{3.16}$$

引理 3.4 在假设 3.1、3.2 和 3.4 下, 有

$$\sup_{x\in E}\left|\frac{1-v_t(x)}{b(t)\phi(x)}-1\right|\xrightarrow[t\to\infty]{}0,$$

这里 $b(t)$ 由 (3.16) 定义.

证明 首先注意到,

$$\frac{1-v_t(x)}{\phi(x)}=\frac{\boldsymbol{P}_x(X_t(E)>0)}{\phi(x)}=\boldsymbol{Q}_x\left(\frac{\mathbf{1}_{(X_t(E)>0)}}{\langle\phi,X_t\rangle}\right)=\boldsymbol{Q}_x(X_t(\phi)^{-1}).$$

对 $0<t_0<t<\infty$, 定义

$$I_t^{(0,t_0]}=\sum_{u\in L_{t_0},u\neq\xi_{t_0}}\delta_{Y_t^u}\quad 与\quad I_t^{(t_0,t]}=\sum_{u\in L_t\setminus L_{t_0}}\delta_{Y_t^u},$$

则有

$$X_t = I_t^{(0,t_0]} + I_t^{(t_0,t]}. \tag{3.17}$$

定义

$$\boldsymbol{Q}_{\phi\widehat{\phi}m}(\cdot) := \int_E \boldsymbol{Q}_x(\cdot)\phi(x)\widehat{\phi}(x)m(dx).$$

在 $\boldsymbol{Q}_{\phi\widehat{\phi}m}$ 下, $X_0 = \delta_Z$, 这里 Z 是取值于 E 的随机变量, 分布为 $\phi\widehat{\phi}m$. 从 $\boldsymbol{Q}_x$ 的构造和移民的 Markov 性容易看出, 对任意 $0 < t_0 < t < \infty$, 有

$$\boldsymbol{Q}_x[(I_t^{(t_0,t]}(\phi))^{-1} \mid \mathcal{G}_{t_0}] = \boldsymbol{Q}_{\widetilde{Y}_{t_0}}[(X_{t-t_0}(\phi))^{-1}] = (\phi^{-1}(1-v_{t-t_0}))(\widetilde{Y}_{t_0}).$$

所以有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}_{\phi\widehat{\phi}m}[(I_t^{(t_0,t]}(\phi))^{-1}] &= \boldsymbol{Q}_{\phi\widehat{\phi}m}[(\phi^{-1}(1-v_{t-t_0}))(\widetilde{Y}_{t_0})] = \langle 1-v_{t-t_0}, \widehat{\phi}\rangle_m, \\
\boldsymbol{Q}_x[(I_t^{(t_0,t]}(\phi))^{-1}] &= \boldsymbol{Q}_x[(\phi^{-1}(1-v_{t-t_0}))(\widetilde{Y}_{t_0})] = \int_E p^{\phi}(t_0,x,y)(\phi^{-1}(1-v_{t-t_0}))(y)m(dy).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

根据分解 (3.17), 有

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(1-v_t(x)) &= \boldsymbol{Q}_x[(X_t(\phi))^{-1}] \\
&= \boldsymbol{Q}_{\phi\widehat{\phi}m}[(I_t^{(t_0,t]}(\phi))^{-1}] + (\boldsymbol{Q}_x[(I_t^{(t_0,t]}(\phi))^{-1}] - \boldsymbol{Q}_{\phi\widehat{\phi}m}[(I_t^{(t_0,t]}(\phi))^{-1}]) \\
&\quad + (\boldsymbol{Q}_x[(X_t(\phi))^{-1} - (I_t^{(t_0,t]}(\phi))^{-1}]) \\
&=: \langle 1-v_{t-t_0}, \widehat{\phi}\rangle_m + \epsilon_x^1(t_0,t) + \epsilon_x^2(t_0,t).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

假设 $t_0 > 1$, 并令 $c, \nu > 0$ 是 (3.3) 中出现的常数. 利用 (3.18), 有

$$\begin{aligned}
|\epsilon_x^1(t_0,t)| &= |\boldsymbol{Q}_x[(I_t^{(t_0,t]}(\phi))^{-1}] - \boldsymbol{Q}_{\phi\widehat{\phi}m}[(I_t^{(t_0,t]}(\phi))^{-1}]| \\
&= \left| \int_E p^{\phi}(t_0,x,y)(\phi^{-1}(1-v_{t-t_0}))(y)m(dy) - \langle 1-v_{t-t_0}, \widetilde{\phi}\rangle_m \right| \\
&\leqslant \int_{y\in E} |p^{\phi}(t_0,x,y) - (\phi\widehat{\phi})(y)|(\phi^{-1}(1-v_{t-t_0}))(y)m(dy) \\
&\leqslant c\mathrm{e}^{-\nu t_0}\langle 1-v_{t-t_0}, \widehat{\phi}\rangle_m.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

还有

$$\begin{aligned}
|\epsilon_x^2(t_0,t)| &= |\boldsymbol{Q}_x[(X_t(\phi))^{-1} - (I_t^{(t_0,t]}(\phi))^{-1}]| \\
&= \boldsymbol{Q}_x[I_t^{(0,t_0]}(\phi)\cdot(X_t(\phi))^{-1}\cdot(I_t^{(t_0,t]}(\phi))^{-1}] \\
&\leqslant \boldsymbol{Q}_x[\mathbf{1}_{I_t^{(0,t_0]}(\phi)>0}\cdot(I_t^{(t_0,t]}(\phi))^{-1}] \\
&= \boldsymbol{Q}_x(\boldsymbol{Q}_x[\mathbf{1}_{I_t^{(0,t_0]}(\phi)>0} \mid \mathcal{G}_{t_0}]\cdot\boldsymbol{Q}_x[(I_t^{(t_0,t]}(\phi))^{-1} \mid \mathcal{G}_{t_0}]).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

注意 ζ_i 与 r_i 分别是 ζ^{ξ_i} 与 r^{ξ_i} 的简记. 注意到

$$\boldsymbol{Q}_x[\mathbf{1}_{I_t^{(0,t_0]}(\phi)=0} \mid \mathcal{G}_{t_0}] = \boldsymbol{Q}_x\left[\prod_{\zeta_i\leqslant t_0}(\boldsymbol{P}_{\widetilde{Y}(\zeta_i)}(X_{t-\zeta_i}(E)=0))^{r_i-1}\,\middle|\,\mathcal{G}_{t_0}\right]$$

$$\geqslant \boldsymbol{Q}_x\bigg[\prod_{\zeta_i\leqslant t_0}(\boldsymbol{P}_{\widetilde{Y}(\zeta_i)}(X_{t-t_0}(E)=0))^{r_i-1}\bigg|\mathcal{G}_{t_0}\bigg]$$

和

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_x[\mathbf{1}_{I_t^{(0,t_0]}(\phi)>0}\mid\mathcal{G}_{t_0}]&\leqslant \boldsymbol{Q}_x\bigg[\prod_{\zeta_i\leqslant t_0}(r_i-1)\boldsymbol{P}_{\widetilde{Y}(\zeta_i)}(X_{t-t_0}(E)>0)\bigg|\mathcal{G}_{t_0}\bigg]\\&\leqslant \boldsymbol{Q}_x\bigg[\sum_{\zeta_i\leqslant t_0}(r_i-1)(1-v_{t-t_0})(\widetilde{Y}(\zeta_i))\bigg]\\&=\int_0^{t_0}\beta(\widetilde{Y}_s)(k-1)kp_k(\widetilde{Y}_s)(1-v_{t-t_0})(\widetilde{Y}_s)ds\\&\leqslant t_0\|\beta V\phi\|_\infty\|\phi^{-1}(1-v_{t-t_0})\|_\infty,\end{aligned}\tag{3.22}$$

则根据 (3.21) 和 (3.22), 有

$$\begin{aligned}|\epsilon_x^2(t_0,t)|&\leqslant t_0\|\beta V\phi\|_\infty\|\phi^{-1}(1-v_{t-t_0})\|_\infty\boldsymbol{Q}_x(\boldsymbol{Q}_x[(I_t^{(t_0,t]}(\phi))^{-1}\mid\mathcal{G}_{t_0}])\\&=t_0\|\beta V\phi\|_\infty\|\phi^{-1}(1-v_{t-t_0})\|_\infty\int_E p^\phi(t_0,x,y)(\phi^{-1}(1-v_{t-t_0}))(y)m(dy)\\&\leqslant t_0\|\beta V\phi\|_\infty\|\phi^{-1}(1-v_{t-t_0})\|_\infty(1+c\mathrm{e}^{-\nu t})\langle 1-v_{t-t_0},\widehat{\phi}\rangle_m.\end{aligned}\tag{3.23}$$

结合 (3.19)、(3.20) 和 (3.23), 得到

$$\begin{aligned}\bigg|\frac{\phi^{-1}(1-v_t(x))}{\langle 1-v_{t-t_0},\widehat{\phi}\rangle_m}-1\bigg|&\leqslant\frac{|\epsilon_x^1(t_0,t)|}{\langle 1-v_{t-t_0},\widehat{\phi}\rangle_m}+\frac{|\epsilon_x^2(t_0,t)|}{\langle 1-v_{t-t_0},\widehat{\phi}\rangle_m}\\&\leqslant c\mathrm{e}^{-\gamma t_0}+t_0\|\beta V\phi\|_\infty\|\phi^{-1}(1-v_{t-t_0})\|_\infty(1+c\mathrm{e}^{-\nu t_0}).\end{aligned}\tag{3.24}$$

由引理 3.3 可知, 当 $t\to\infty$ 时, $\|\phi^{-1}(1-v_t)\|_\infty\to 0$, 所以存在映射 $t\mapsto t_0(t)$ 使得

$$t_0(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}\infty,\quad t_0(t)\|\phi^{-1}(1-v_{t-t_0(t)})\|_\infty\xrightarrow[t\to\infty]{}0.$$

把上面选取的 $t_0(t)$ 代回到 (3.24), 得到

$$\sup_{x\in E}\bigg|\frac{\phi^{-1}(1-v_t(x))}{\langle 1-v_{t-t_0(t)},\widehat{\phi}\rangle_m}-1\bigg|\xrightarrow[t\to\infty]{}0.\tag{3.25}$$

现在注意到

$$\begin{aligned}\bigg|\frac{\langle 1-v_t,\widehat{\phi}\rangle_m}{\langle 1-v_{t-t_0(t)},\widehat{\phi}\rangle_m}-1\bigg|&\leqslant\int\bigg|\frac{\phi^{-1}(1-v_t(x))}{\langle 1-v_{t-t_0(t)},\widehat{\phi}\rangle}-1\bigg|\phi\widehat{\phi}(x)m(dx)\\&\leqslant\sup_{x\in E}\bigg|\frac{\phi^{-1}(1-v_t(x))}{\langle 1-v_{t-t_0(t)},\widehat{\phi}\rangle_m}-1\bigg|\xrightarrow[t\to\infty]{}0.\end{aligned}\tag{3.26}$$

最后根据 (3.25)、(3.26) 与一致收敛性, 得到想要的

$$\sup_{x\in E}\bigg|\frac{\phi^{-1}(1-v_t(x))}{\langle 1-v_t,\widehat{\phi}\rangle_m}-1\bigg|\xrightarrow[t\to\infty]{}0.$$

证毕. □

引理 3.5 在假设 3.1、3.2 和 3.4 下, 有

$$\frac{1}{tb(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{2}\langle \beta V\phi, \phi\widehat{\phi}\rangle_m,$$

这里 $b(t) = \langle 1 - v_t, \widehat{\phi}\rangle_m$.

证明 对任意 $z \in [0,1]$, 定义

$$\psi_0(x,z) := \psi(x,z) - 1 - A(x)(z-1),$$
$$R(x,z) := \psi_0(x,z) - \frac{1}{2}V(x)(z-1)^2.$$

注意到 $\psi'(x,\theta) \leqslant 0$ 与 $\psi''(x,\theta) \geqslant 0$ 对 $\theta \in (z,1]$ 成立. 利用中值定理得

$$\psi_0(x,z) = \frac{1}{2}\psi''(x,\theta)(z-1)^2 \leqslant \frac{1}{2}V(x)(z-1)^2,$$

这里 $\theta \in (z,1]$. 这样,

$$R(x,z) = e(x,z)(z-1)^2, \quad \forall\, z \in [0,1],$$

这里 $e(x,z)$ 满足 $|e(x,z)| \leqslant V(x), \forall\, z \in [0,1]$ 及

$$e(x,z) \xrightarrow[z\to 1]{} 0, \quad x \in E. \tag{3.27}$$

令 Ψ_0 为 $\mathcal{B}^+(E)$ 上算子, 其定义为

$$(\Psi_0 f)(x) := \psi_0(x, f(x)), \quad f \in \mathcal{B}^+(E), \quad x \in E.$$

定义 $l_t(x) := (1 - v_t(x)) - b(t)\phi(x)$, 引理 3.4 告诉我们,

$$\sup_{x\in E}\left|\frac{l_t(x)}{b(t)\phi(x)}\right| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0. \tag{3.28}$$

利用 (3.13), 可知 $t \mapsto b(t)$ 在下面集合上可导:

$$\boldsymbol{C} = \{t > s_0 : \text{函数 } t \mapsto \langle \Psi_0(v_t), \beta\widehat{\phi}\rangle_m \text{ 在 } t \text{ 点连续}\},$$

并且

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}b(t) &= -\langle \Psi_0(v_t), \widehat{\phi}\rangle_m = -\left\langle \frac{1}{2}V\cdot(1-v_t)^2 + R(\cdot, v_t(\cdot)), \beta\widehat{\phi}\right\rangle_m \\ &= -\left\langle \frac{1}{2}V\cdot(b(t)\phi + l_t)^2 + R(\cdot, v_t(\cdot)), \beta\widehat{\phi}\right\rangle_m \\ &= -b(t)^2\left[\frac{1}{2}\langle \beta V\phi, \phi\widehat{\phi}\rangle_m + g(t)\right], \quad t \in \boldsymbol{C},\end{aligned} \tag{3.29}$$

这里

$$g(t) = \left\langle \frac{l_t}{b(t)\phi}, \beta V\phi^2\widehat{\phi}\right\rangle_m + \frac{1}{2}\left\langle \left(\frac{l_t}{b(t)\phi}\right)^2, \beta V\phi^2\widehat{\phi}\right\rangle_m + \left\langle \frac{R(\cdot, v_t(\cdot))}{b(t)^2\phi^2}, \phi^2\widehat{\phi}\right\rangle_m.$$

利用 (3.29) 得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{b(t)}\right) = -\frac{db(t)}{b(t)^2 dt} = \frac{1}{2}\langle \beta V\phi, \phi\widehat{\phi}\rangle_m + g(t), \quad t \in \boldsymbol{C}.$$

由于函数 $t \mapsto \langle \Psi_0(v_t), \beta\widehat{\phi}\rangle_m$ 是非增的, $(s_0,\infty) \setminus \boldsymbol{C}$ 只有最多可数个点. 根据 (3.27) 和 (3.28), 并重复文献 [17, 引理 5.4] 的证明, 可以得到, 当 $t \to \infty$ 时 $g(t) \to 0$, 从而得到想要的

$$\frac{1}{b(t)t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{2}\langle \beta V\phi, \phi\widehat{\phi}\rangle_m.$$

证毕. □

结合引理 3.4 和 3.5, 可得到定理 3.3 成立.

3.3　分枝 Brown 运动与行波解

本小节考虑 $\mathbb{R}$ 上分枝 Brown 运动, 即空间运动 $Y=\{Y_t,\Pi_x\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上 Brown 运动. 假设分枝速率 $\beta>0$ 是一个常数, 后代分布 $\{(p_n)_{n=0}^\infty\}$ 不依赖于空间位置, 且满足

$$A := \sum_{n=0}^\infty np_n < \infty.$$

我们知道, 对任意 $\lambda\in\mathbb{R}$, $\Pi_x \mathrm{e}^{\lambda Y_t} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}$. 令 $\phi(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$, 则

$$\phi(x) = \mathrm{e}^{-[\frac{1}{2}\lambda^2+(A-1)\beta]t} P_t^{(1-A)\beta}\phi(x), \quad x\in\mathbb{R}.$$

所以,

$$W_t(\lambda) := \mathrm{e}^{-[\frac{1}{2}\lambda^2+(A-1)\beta]t}\langle\phi, X_t\rangle = \mathrm{e}^{-[\frac{1}{2}\lambda^2+(A-1)\beta]t}\sum_{u\in L_t}\mathrm{e}^{-\lambda Y_u(t)}, \quad t\geqslant 0 \tag{3.30}$$

关于 $\{\mathcal{F}_t, t\geqslant 0\}$ 是 $\boldsymbol{P}_x$- 非负鞅. 这样, 对任意 $x\in\mathbb{R}$, 极限 $W_\infty(\lambda) := \lim_{t\to\infty} W_t(\lambda)$ 关于 $\boldsymbol{P}_x$- 几乎必然存在.

在 $p_0=0$ 的假设下, Kyprianou [8] 利用脊柱分解技巧, 给出了鞅 $\{W_t(\lambda), t\geqslant 0\}$ L^1 收敛的充要条件:

定理 3.4　假设 $p_0=0$. 令 $\underline{\lambda} := \sqrt{2\beta(A-1)}$.

(1) 若 $|\lambda|\geqslant\underline{\lambda}$, 则 $W_\infty(\lambda)=0$ $\boldsymbol{P}_x$-a.s.;

(2) 若 $|\lambda|<\underline{\lambda}$ 且 $\sum_{n=1}^\infty p_n n\log n=\infty$, 则 $W_\infty(\lambda)=0$ $\boldsymbol{P}_x$-a.s.;

(3) 若 $|\lambda|<\underline{\lambda}$ 且 $\sum_{n=1}^\infty p_n n\log n<\infty$, 则 $W_t(\lambda)\to W_\infty(\lambda)$ 在 $\boldsymbol{P}_x$- 几乎必然与 $L^1(\boldsymbol{P}_x)$ 意义下成立.

利用脊柱技巧, Hardy 和 Harris [6] 证明了许多情形下鞅具有非退化极限, 而且收敛可以加强为对某个 $p\in(1,2]$, $L^p(\boldsymbol{P}_x)$- 收敛.

定理 3.5　假设 $p_0=0$. 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 与任意一个 $p\in(1,2]$, 有

(1) 若 $p\lambda^2<2(A-1)\beta$ 与 $\sum_{n=1}^\infty p_n n^p<\infty$, 则当 $t\to\infty$ 时, $W_t(\lambda)\to W_\infty(\lambda)$ 在 $\boldsymbol{P}_x$- 几乎必然与 $L^p(\boldsymbol{P}_x)$ 意义下成立;

(2) 若 $p\lambda^2>2(A-1)\beta$ 或者 $\sum_{n=1}^\infty p_n n^p=\infty$, 则 $\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{P}_x(W_t(\lambda))=\infty$.

现在应用第 2 节中给出的脊柱分解, 可以得出上面的定理 3.4 与 3.5 在 $p_0>0$ 的情形仍然成立.

我们知道

$$\partial W_t(\lambda) := \mathrm{e}^{-[\frac{1}{2}\lambda^2+(A-1)\beta]t}\sum_{u\in L_t}(Y_u(t)+\lambda t)\mathrm{e}^{-\lambda Y_u(t)}, \quad t\geqslant 0$$

关于 $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ 是一个 $\boldsymbol{P}_x$- 鞅, 这个鞅被称为导数鞅.

鞅 $\{\partial W_t(\lambda), t \geqslant 0\}$ 不是非负的. 要建立当 $t \to \infty$ 时 $\partial W_t(\lambda)$ 的极限, 通常考虑下面一个与之相关的非负鞅.

令 $\widetilde{L}_t$ 表示 L_t 中满足 "粒子本身及其祖先到 t 时刻为止还没有碰到时 - 空屏障 $y + \sqrt{(A-1)\beta}t = -x$" 的粒子全体. 定义

$$V_t^x(\lambda) = \mathrm{e}^{-[\frac{1}{2}\lambda^2 + (A-1)\beta]t} \sum_{u \in \widetilde{L}_t} \frac{x + Y_u(t) + \lambda t}{x} \mathrm{e}^{-\lambda Y_u(t)}. \tag{3.31}$$

在假设条件 $p_0 = 0$ 下, Kyprianou[8] 证明了 $\{V_t^x(\lambda), t \geqslant 0\}$ 是均值为 1 的 $\boldsymbol{P}_x$- 鞅, 且当 $\lambda \geqslant \sqrt{2(A-1)\beta}$ 时, $\partial W(\lambda) := \lim_{t\to+\infty} \partial W_t(\lambda)$ 在 $\boldsymbol{P}_x$ 下几乎必然存在且等于 $\lim_{t\to+\infty} x V_t^x(\lambda)$.

极限 $\partial W(\underline{\lambda})$ 重要性在于, 当 $\partial W(\underline{\lambda})$ 非退化时, 它的尺度变换后的 Laplace 变换给出了如下 KPP (Kolmogorov-Petrovskii-Piskounov) 方程的行波解:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta(f(u) - u),$$

这里 $f(u) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n$ 是后代分布 $\{p_n, n \geqslant 0\}$ 的概率母函数. 我们说的行波解是指形式为 $u(t,x) = w(x - ct)$ 的解, 这里 w 是一个满足 $\lim_{t\to-\infty} w(t) = 0$ 和 $\lim_{t\to\infty} w(t) = 1$ 的单调函数, 其中 c 被称为传播速度. 下面 Yang 和 Ren [11] 的结果给出了 $\partial W(\underline{\lambda})$ 非退化的充要条件.

定理 3.6 [11] 假设 $p_0 = 0$ 且 $\lambda = \underline{\lambda}$. 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n n(\log n)^2 < \infty$, 则 $\partial W(\underline{\lambda}) > 0$ $\boldsymbol{P}_x$-a.s.;

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n n(\log n)^2 = \infty$, 则 $\partial W(\underline{\lambda}) = 0$ $\boldsymbol{P}_x$-a.s.

推论 3.1 当 $c = \underline{\lambda} = \sqrt{2\beta\beta(A-1)}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n n(\log n)^2 < \infty$ 时, 存在唯一传播速度为 c 的行波解, 且这个行波解可以表示为 $\Phi_c(x) = E^x \exp(-\mathrm{e}^{\lambda x} \partial W(\lambda))$.

现在利用第 2 节的脊柱分解可知, 上面定理 3.6 与推论 3.1 在 $p_0 > 0$ 的情形仍然成立.

3.4 多物种分枝 Brown 运动与行波解

Hardy 和 Harris [6] 考虑多物种分枝扩散, 此时刻画空间运动的 Hunt 过程由 $(Y_t, \eta_t)_{t\geqslant 0}$ 给出, 这里类型过程 $(\eta_t)_{t\geqslant 0}$ 是一个状态空间为 $I := \{1, \dots, n\}$ 的 Markov 链, 其中 Q- 矩阵为 θQ (θ 是一个正常数), 且空间位置过程 S_t 是不带漂移的 $\mathbb{R}$ 上 Brown 运动, 且当类型 η_t 为 i 时, Brown 运动具有扩散系数 $a(i) > 0$. 任何一个现在类型为 i 的粒子, 分裂速率为 $\beta(i)$, 分裂时被随机个后代代替, 这里后代个数的分布为 $\{p_n(i), n \geqslant 0\}$. 新出生的粒子继承父亲的位置与类型, 然后独立运动, 并随机地重复父辈的行为, 一代代继续下去. 令 $A(i) := \sum_{n=0}^{\infty} n p_n(i) < \infty$ 表示类型为 i 的粒子的后代分布的均值.

按通常情形, 分枝 Brown 运动在 t 时的状态由在 $\mathbb{R} \times I$ 取值的点测度来刻画, 即 $X_t = \sum_{u\in L_t} \delta_{(y,i)}$, 这里 L_t 是 t 时刻存活的粒子组成的集合. 假设概率测度 $\{\boldsymbol{P}_{(y,i)}, (y,i) \in \mathbb{R} \times I\}$ 定义在自然 σ- 域流 $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ 上, 这里 $\boldsymbol{P}_{(y,i)}$ 表示初始 0 时刻从单个类型为 i、空间位置为 y 的粒子产生的多物种分枝 Brown 运动的分布.

对于有限物种的分枝 Brown 运动, 一个基本的正鞅为

$$W_\lambda(t) := \sum_{u \in L_t} v_\lambda(\eta_u(t)) \mathrm{e}^{\lambda Y_u(t) - E_\lambda t}, \quad t \geqslant 0,$$

这里 v_λ 与 E_λ 满足

$$\left(\frac{1}{2}\lambda^2\Sigma+\theta Q+(A-1)R\right)v_\lambda=E_\lambda v_\lambda,$$

$\Sigma:=\mathrm{diag}(a(i):i\in I)$, $A:=\mathrm{diag}(A(i),i\in I)$ 且 $R:=\mathrm{diag}(\beta(i):i\in I)$, 即 v_λ 是矩阵 $\frac{1}{2}\lambda^2A+\theta Q+R$ 的特征值为 E_λ 的 Perron-Frobenius 特征值, 这个鞅是分枝 Brown 运动的鞅 (3.30) 的对应物.

由于 $\{W_t(\lambda),t\geqslant 0\}$ 是严格正的鞅, 因此, 在 $\boldsymbol{P}_{(y,i)}$ 下, $W_\infty(\lambda):=\lim_{t\to\infty}W_t(\lambda)$ 几乎必然存在且有限. 在 "$p_0(i)=0,\forall i\in I$" 成立的条件下, 文献 [6, 定理 10.4] 给出了鞅 $W_\infty(\lambda):=\lim_{t\to\infty}W_t(\lambda)$ $L^1(\boldsymbol{P}_{(y,i)})$- 收敛的充要条件. 利用一般脊柱分解定理, 假设 "$p_0(i)=0,\forall i\in I$" 可以去掉. 利用脊柱分解定理有类似结果: 在许多情形下鞅具有非退化极限, 而且极限可以在比 $L^1(\boldsymbol{P}_{(y,i)})$ 更强的意义下收敛, 即在 $L^p(\boldsymbol{P}_{(y,i)})$ $(p\in(1,2])$- 意义下收敛 (参见文献 [6, 定理 10.5]).

Harris 和 Williams [7] 研究了一个类型为连续的多物种分枝扩散, 其中刻画粒子运动的 Hunt 过程由 $(Y_t,V_t)_{t\geqslant 0}$ 描述, 这里空间运动 $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ 是不带漂移的 Brown 运动, 具有瞬间方差 ay^2, 其中 $a\geqslant 0$ 是固定常数; 类型 $(V_t)_{t\geqslant 0}$ 在实数轴上按一个 Ornstein-Uhlenbeck 过程运动. 一个类型为 v 的粒子的死亡率 (分裂速率) 为 $rv^2+\rho$, 其中 $r,\rho\geqslant 0$ 为固定常数, 然后产生空间位置和类型与父亲一样的 2 个后代. 这个模型与有限物种的分枝 Brown 运动是相似的, 也存在一个正鞅 $\{W_t(\lambda),t\geqslant 0\}$. 文献 [6, 定理 11.1] 利用脊柱技巧给出了此鞅 L^p- 收敛 $(p\in(1,2])$ 的充要条件. 这里指出, 文献 [6] 的结果对于一般后代分布也成立, 也就是说, 一个类型为 $v\in\mathbb{R}$ 的粒子死亡后, 在其死亡的空间位置产生相同类型的随机个后代, 后代数服从分布 $\{p_n(v),n\geqslant 0\}$. 在 $\{p_n(v),n\geqslant 0\}$ $(v\in\mathbb{R})$ 满足一些矩条件并允许存在 $v\in\mathbb{R}$ 使得 $p_0(v)=0$ 的情形下, 与文献 [6, 定理 11.1] 类似的结果仍然成立. 不在此给出细节.

致谢 感谢两位审稿人对本文提出的宝贵建议.

参考文献

1 Lyons R, Pemantle R, Peres Y. Conceptual proofs of $L\log L$ criteria for mean behavior of branching processes. Ann Probab, 1995, 23: 1125–1138

2 Biggins J D, Kyprianou A E. Measure change in multitype branching. Adv in Appl Probab, 2004, 36: 544–581

3 Kurtz T G, Lyons R, Pemantle R, et al. A conceptual proof of the Kesten-Sigum theorem for multitype branching processes. In: Classical and Modern Branching Processes. New York: Springer-Verlag, 1997, 181–186

4 Kyprianou A E, Palau S, Ren Y-X. Almost sure growth of supercritical multi-type continuous-state branching process. ALEA Lat Am J Probab Math Stat, 2018, 15: 409–428

5 Chen Z-Q, Ren Y-X, Yang T. Law of large numbers for branching symmetric Hunt processes with measure-valued branching rates. J Theoret Probab, 2017, 30: 898–931

6 Hardy R, Harris S C. A spine approach to branching diffusions with applications to L^p-convergence of martingales. In: Séminaire de Probabilités XLII. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1979. Berlin-Heidelberg: Springer, 2009, 281–330

7 Harris S C, Williams D. Large deviations and martingales for a typed branching diffusion. I. Astérisque, 1996, 236: 133–154

8 Kyprianou A E. Travelling wave solutions to the K-P-P equation: Alternatives to Simon Harris' probabilistic analysis. Ann Inst H Poincaré Probab Statist, 2004, 40: 53–72

9 Liu R-L, Ren Y-X, Song R. $L\log L$ condition for supercritical branching Hunt processes. J Theoret Probab, 2011, 24: 170–193

10 Ren Y-X, Yang T. Multitype branching Brownian motion and traveling waves. Adv in Appl Probab, 2014, 46: 217–240

11 Yang T, Ren Y-X. Limit theorem for derivative martingale at criticality w.r.t branching Brownian motion. Statist Probab Lett, 2011, 81: 195–200

12 Chen Z-Q, Ren Y-X, Song R. $L\log L$ criterion for a class of multitype superdiffusions with non-local branching mechanisms. Sci China Math, 2019, 62: 1439–1462

13 Chen Z-Q, Ren Y-X, Yang T. Skeleton decomposition and law of large numbers for supercritical superprocesses. Acta Appl Math, 2019, 159: 225–285

14 Eckhoff M, Kyprianou A E, Winkel M. Spines, skeletons and the strong law of large numbers for superdiffusions. Ann Probab, 2015, 43: 2545–2610
15 Kyprianou A E, Liu R-L, Murillo-Salas A, et al. Supercritical super-Brownian motion with a general branching mechanism and travelling waves. Ann Inst H Poincaré Probab Statist, 2012, 48: 661–687
16 Liu R-L, Ren Y-X, Song R. $L \log L$ criterion for a class of superdiffusions. J Appl Probab, 2009, 46: 479–496
17 Ren Y-X, Song R, Sun Z. Spine decompositions and limit theorems for a class of critical superprocesses. Acta Appl Math, 2020, 165: 91–131
18 Lyons R. A simple path to Biggins' martingale convergence for branching random walk. In: Classical and Modern Branching Processes. The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, vol. 84. New York: Springer, 1997, 217–221
19 Powell E. An invariance principle for branching diffusions in bounded domains. Probab Theory Related Fields, 2019, 173: 999–1062
20 Wang L. Strong law of large number for branching Hunt processes. Acta Math Sin Engl Ser, 2015, 31: 1189–1202
21 Dynkin E B. Branching particle systems and superprocesses. Ann Probab, 1991, 19: 1157–1194
22 Chauvin B. Arbres et processus de Bellman-Harris. Ann Inst H Poincaré Probab Statist, 1986, 22: 209–232
23 Chauvin B. Product martingales and stopping lines for branching Brownian motion. Ann Probab, 1991, 19: 1195–1205
24 Neveu J. Arbres et processus de Galton-Watson. Ann Inst H Poincaré Probab Statist, 1986, 22: 199–207
25 Schaeffer H. Banach Lattices and Positive Operators. New York: Springer, 1974
26 Kim P, Song R. Intrinsic ultracontractivity of non-symmetric diffusion semigroups in bounded domains. Tohoku Math J (2), 2008, 60: 527–547
27 Durrett R. Probability Theory and Examples, 2nd ed. Belmont: Duxbury Press, 1996

Spine decomposition for branching Markov processes and its applications

Yan-Xia Ren & Renming Song

Abstract In the literature, the spine decomposition of branching Markov processes was constructed under the assumption that each individual has at least one child. In this paper, we give a detailed construction of the spine decomposition of general branching Markov processes allowing the possibility of no offspring when a particle dies. Then we give some applications of the spine decomposition.

Keywords branching Brownian motion, branching Hunt process, Kesten-Stigum theorem, spine decomposition theorem, traveling wave solution

MSC(2020) 60J80, 60F15, 60J25

doi: 10.1360/SSM-2020-0234