doi: 10.11845/sxjz.2013013a

# 分支过程及相关模型的脊柱分解与应用

刘荣丽 [1,*], 任艳霞 [2,**]

(1. 南京大学数学系, 南京, 江苏, 210093; 2. 北京大学数学科学学院, 北京, 100871)

**摘要:** 分支过程、分支马氏过程和超过程在过去的几十年里越来越受关注, 这是因为这类过程一方面与生物学有着紧密的联系, 另一方面与数学的其他分支也有着紧密的联系. 这类过程性质的研究最早主要是以分析的方法为主, 近十几年来很多研究人员开始用概率的方法来研究这类过程的性质, 其中一类重要的工具是脊柱方法. 脊柱方法主要是依赖于测度的鞅变换和过程的脊柱分解, 将上面三类过程中的随机多个轨道性质的研究转化成一个轨道性质的研究, 从而大大简化了研究的内容, 并且使证明变得非常直观. 本文将介绍这种脊柱方法以及在三类过程中的一些应用.

**关键词:** 分支过程; 鞅变换; 分支马氏过程; 超过程; 行波解
**MR(2010) 主题分类:** 60J80; 60J68 / **中图分类号:** O211.65; O211.62
**文献标识码:** A **文章编号:** 1000-0917(2014)02-0183-23

本文的目的是介绍分支过程、分支马氏过程和超过程的脊柱分解, 以及这一分解在研究这些过程的性质时的应用. 这里我们将专注于这三类过程的脊柱分解的最近发展情况, 重点介绍的问题有过程的指数增长问题和一类 FKPP 方程的行波解的适定性及概率表示问题.

分支过程、分支马氏过程和超过程的脊柱分解, 通常指在原测度的鞅变换下的分解. 本文第 1 节首先介绍测度的鞅变换; 然后第 2–4 节分别介绍分支过程、分支马氏过程和超过程的模型、测度的鞅变换以及在这些鞅变换下的脊柱分解, 而且还分别介绍了脊柱分解在对这些过程增长速度的研究中的应用; 第 5 节介绍分支布朗运动和超布朗运动的脊柱分解, 以及此分解在对应的 FKPP 方程行波解适定性研究中的应用.

## 1 测度的鞅变换

注意在本文中我们不区分概率与关于此概率的的数学期望, 即对于某个概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, 我们用 $\mathbb{P}(A)$ 表示随机事件 $A\in\mathcal{F}$ 的概率, 同时用 $\mathbb{P}(\xi):=\int_\Omega \xi(\omega)\mathrm{d}\mathbb{P}$ 表示定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上随机变量 $\xi$ 的数学期望.

首先我们来介绍测度的鞅变换的一般定义和性质. 设在完备概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上有一个 $\sigma$ 域流 $\{\mathcal{F}_t;t\in T\}$, 其中 $T$ 是 $\mathbb{N}$ 或者 $\mathbb{R}_+$, 表示一个指标集. 若 $\{M_t;t\in T\}$ 是关于 $\{\mathcal{F}_t;t\in T\}$ 的一个非负鞅, 且 $\mathbb{P}(M_0)=1$, 则在 $\sigma$ 域 $\mathcal{F}_t$ 上, 可以定义一个概率测度 $Q_t$, $t\in T$:

$$\mathrm{d}Q_t=M_t\mathrm{d}\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}.$$

令 $\mathcal{F}_\infty=\bigvee_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$. 由于 $\{M_t;t\in T\}$ 是一个鞅, 所以 $\{Q_t;\ t\in T\}$ 关于 $\{\mathcal{F}_t;t\in T\}$ 是相容的. 由测度的相容性定理知, 若 $\Omega$ 是一个 Polish 空间, 则存在 $\mathcal{F}_\infty$ 上一个唯一的概率测度 $Q$, 使得 $Q|_{\mathcal{F}_t}=Q_t$. 测度 $Q$ 称为概率测度 $\mathbb{P}$ 的关于鞅 $\{M_t;\ t\in T\}$ 的变换, 简称为鞅变换. 由鞅

收稿日期: 2013-12-12.
基金项目: 国家自然科学基金 (No. 11271030, No. 11128101) 和江苏省自然科学基金 (No. BK20130545).
E-mail: * rongli.liu@gmail.com; ** yxren@math.pku.edu.cn

$\{M_t;\, t\in T\}$ 的非负性可知该鞅有关于概率测度 $\mathbb{P}$ 的几乎处处极限, 记为 $M_\infty$, 且下面结论成立 (可参见 [12, 第 4 章]).

**定理 1.1** 对任意的 $A\in\mathcal{F}_\infty$,

$$Q(A)=\int_A M_\infty \mathrm{d}\mathbb{P}+Q(A\cap\{M_\infty=\infty\}).$$

如果定义 $Q_a(A)=\int_A M_\infty \mathrm{d}\mathbb{P}$, $Q_s(A)=Q(A\cap\{M_\infty=\infty\})$, 则 $Q=Q_a+Q_s$ 是 $Q$ 关于 $\mathbb{P}$ 的 Lebesgue-Radon-Nikodym 分解. 特别有下面的等价刻画,

$$M_\infty=\infty,\ Q\text{-a.s.} \Leftrightarrow M_\infty=0,\ \ \mathbb{P}\text{-a.s.} \tag{1.1}$$

$$M_\infty<\infty,\ Q\text{-a.s.} \Leftrightarrow \int M_\infty \mathrm{d}\mathbb{P}=1. \tag{1.2}$$

该定理的结论将非负鞅的极限 $M_\infty$ 关于原测度 $\mathbb{P}$ 是否退化的判断转化成了在鞅变换后新测度 $Q$ 下极限 $M_\infty$ 是否是有限的问题. 与对一个随机变量是否为零的判断相比, 对随机变量是否有限的判断往往会简单些. 从而这个等价刻画就大大简化了极限退化问题的判断.

## 2 分支过程

### 2.1 Galton-Watson 分支过程和 Galton-Watson 分支树

Galton-Watson 分支过程是一类比较简单的分支模型. 该模型是说: 设初始时刻系统中的人口数为 $Z_0$, 第 $n$ 代系统中人口数为 $Z_n$, 在第 $n+1$ 代的时候, 若第 $k$ 个第 $n$ 代个体产生 $\xi_k^{n+1}$ 个后代, 则第 $n+1$ 代系统中的人口数为

$$Z_{n+1}=\sum_{k=1}^{Z_n}\xi_k^{n+1},$$

其中 $\{\xi_k^n; k=1,2,\cdots,n=1,2,\cdots\}$ 独立同分布, 且独立于 $Z_0$. 若 $\xi_k^n$ 的共同分布为 $\mathrm{p}=\{p_k;k\in\mathbb{N}\}$, 则分布 p 称为该分支过程的后代分布. 这样定义的过程 $Z=\{Z_n;\ n\in\mathbb{N}\}$ 叫做 Galton-Watson 分支过程, 简称为 GW 分支过程. GW 分支过程 $Z$ 是一个取值空间为 $\mathbb{N}:=\{0,1,2,\cdots\}$ 的马尔科夫链. 这类过程的性质以及与之相关的更为复杂的分支模型, 如多物种分支过程、连续时间离散状态的分支过程或连续状态的分支过程, 在 [6, 30] 等一些经典书籍中都有较为详细的介绍. 若 $Z$ 的后代分布 p 的矩母函数为

$$f(s)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^k,\quad 0\le s\le 1,$$

则平均后代个数为 $m=f'(1)=\sum_{k=0}^\infty kp_k$, 称 $m>1\ (=,\ <1)$ 的 GW 分支过程为上临界 (临界, 下临界) 的. 分支过程中最为基础的问题是该过程的灭绝概率问题, GW 分支过程的灭绝概率定义为 $q:=\lim_{n\to\infty}P(Z_n=0)$. 关于 GW 分支过程的灭绝概率有下面的结论.

**定理 2.1**[51−52](Steffensen (1930, 1932)) 当 GW 分支过程 $Z$ 是临界或下临界且 $p_1<1$ 时, $q=1$; 当 $Z$ 是上临界的时候, $q$ 是方程 $s=f(s)$ 在 $[0,1)$ 中的唯一的解, 所以 GW 分支过程以一定的正概率永远存活. 若 $m<\infty$, 则 $\frac{Z_n}{m^n}$ 是一个鞅.

Galton-Watson 过程也可以用 Galton-Watson 树来刻画, 关于分支树可参见 [37, 50] 以及其中的参考文献. 这里用 Ulam-Harris 符号集来表示 Galton-Watson 树的底空间, 令 $\mathbb{N}_0=\{1,2,\cdots\}$, Ulam-Harris 符号集等价于集合 $\Gamma$,

$$\Gamma:=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbb{N}_0^n$$

(其中 $\mathbb{N}_0^0=\{\emptyset\}$ 称为根). 称 $\mathrm{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in\mathbb{N}_0^n$ 为一个粒子, $|\mathrm{u}|:=n$ 表示个体 u 的长度 (辈数). 当 $n\geq 1$ 时, $\mathrm{u}-1$ 表示 $(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1})$, 是 $\mathrm{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 的母亲. 对任意的 $i\in\mathbb{N}_0$, $\mathrm{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in\mathbb{N}_0^n$, 记 u 的第 $i$ 个后代为 $\mathrm{u}i=(u_1,u_2,\cdots,u_n,i)$. 若 $\mathrm{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, $\mathrm{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_m)\in\Gamma$, uv 表示 u 和 v 的串接 $\mathrm{uv}=(u_1,u_2,\cdots,u_n,v_1,v_2,\cdots,v_m)$ ($\mathrm{u}\emptyset=\emptyset\mathrm{u}=\mathrm{u}$); 若 $m<n$, 且 $v_i=u_i$, $i=1,2,\cdots,m$, 则记 $\mathrm{v}<\mathrm{u}$, 称 v 是 u 的一个祖先. 显然 $\mathrm{u}<\mathrm{uv}$, $\mathrm{v}\in\Gamma\backslash\{\emptyset\}$. 于是, u 的所有祖先组成的集合可定义为

$$\{\mathrm{v}\in\Gamma;\ \mathrm{v}<\mathrm{u}\}=\{\mathrm{v}\in\Gamma;\ 存在\ \mathrm{w}\in\Gamma\setminus\{\emptyset\}\ 使得\ \mathrm{vw}=\mathrm{u}\}.$$

称 $\Gamma$ 的一个子集 $\tau$ 为一棵 Galton-Watson 树, 如果 $\tau$ 满足条件: (i) $\emptyset\in\tau$; (ii) 若 $\mathrm{u},\mathrm{v}\in\Gamma$, 则 $\mathrm{uv}\in\tau$ 可以推出 $\mathrm{u}\in\tau$; (iii) 对任意的 $\mathrm{u}\in\tau$, 存在 $r_{\mathrm{u}}\in\mathbb{N}$, 使得 $j\in\mathbb{N}$, $\mathrm{u}j\in\tau$ 当且仅当 $1\leq j\leq r_{\mathrm{u}}$. 可见一个 Galton-Watson 树就是一个有根的树, 其中每个粒子都有一个编号, 且它们的后代被从左到右地排列起来, 下面图形展示了一棵 GW 树.

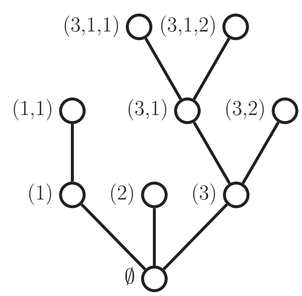


图 1 Galton-Watson 分支树

显然, 对任意的 $\mathrm{v}\in\tau$, 集合 $\{\mathrm{v}\}\cup\{\mathrm{u}\in\tau;\mathrm{v}<\mathrm{u}\}$ 组成了一个以 v 为根的 $\tau$ 的子树. 记 Galton-Watson 树组成的集合为 $\mathbb{T}$. 称任意的 $\mathrm{u}\in\tau$ 为 $\tau$ 的一个节点或者 $\tau$ 中的一个个体或者一个粒子. 定义

$$Z_n(\tau):=\tau\ 中长度为\ n\ 的粒子的个数,$$

$[\tau]_n$ 表示在前 $n$ 代之前 (包括第 $n$ 代) 都与 $\tau$ 相同的分支树的集合, $\mathcal{F}_n:=\sigma([\tau]_n)$ 表示包含了所有 $[\tau]_n$ 的 $\sigma$ 代数, $\mathcal{F}_\infty=\bigvee_{n\geq 0}\mathcal{F}_n$.

在 $(\mathbb{T},\mathcal{F}_\infty)$ 上存在一个测度 $\mathbb{P}$, 使得在测度 $\mathbb{P}$ 下过程 $\{Z_n;n\in\mathbb{N}\}$ 是一个 GW 分支过程, 且后代分布为 $\mathbb{P}(r_{\mathrm{u}}=k)=p_k$. 定理 2.1 告诉我们当平均后代个数 $m>1$ 时, 分支树会以一定的正概率是一棵无穷树. 而且通过马氏过程的讨论可知, 在这种情况下, 分支树上粒子的个数会随着代数 $n$ 趋于无穷而趋于无穷. 而其增长速度问题由 Kesten-Stigum 定理刻画如下:

**定理 2.2**[32] (Kesten & Stigum (1966)) 设 $\{Z_n\}$ 是一个 Galton-Watson 分支过程, $Z_0=1$, 后代分布的期望 $m$ 满足: $1<m<\infty$. 设 $W$ 是鞅 $\frac{Z_n}{m^n}$ 的极限, $L$ 是一个分布率为后代分布的随机变量, 则 $\mathbb{P}[W]=1$ 的充要条件是 $\mathbb{P}[L\ln^+L]<\infty$.

所以当上临界的 GW 分支过程的后代分布有有限的 $L\ln^+ L$ 阶矩, 且分支过程不灭绝时, 时刻 $n$ 的粒子的个数 $Z_n$ 的增长速度为 $m^n$. Kesten 和 Stigum[32] 依赖于对分支过程的母函数的分析, 应用纯分析的方法得到了该结论, 到了 1995 年, Lyons, Pemantle 和 Peres[42] 应用了一种概率的方法证明了上面的结论, 这种概率的方法就是本文要介绍的脊柱方法.

### 2.2 Galton-Watson 分支过程的脊柱结构和有偏树

令 $\{Z_n\}$ 表示 2.1 节介绍的 Galton-Watson 分支过程, 则在 Galton-Watson 分支树空间 $(\mathbb{T},\mathcal{F}_\infty)$ 上存在一个测度 $\mathbb{P}$, 使得 $\{Z_n(\tau)\}$ 在这个测度下的后代分布为给定的分布 $\mathrm{p}=\{p_k;k\in\mathbb{N}\}$. 在可测空间 $(\mathbb{T},\mathcal{F}_\infty)$ 上我们还可以构造另一个测度 $Q$, 使得在该测度下, 几乎处处所有的树都是一个无穷树, 称这些树 $\hat{\tau}$ 为有偏 Galton-Watson 树. 定义分布率 $\hat{\mathrm{p}}=\{\hat{p}_k;k\in\mathbb{N}\}$, 其中 $\hat{p}_k:=\frac{kp_k}{m}$, $k=0,1,2,\cdots$, 称为后代分布 p 的有偏分布, 显然 $\hat{p}_0=0$. 有偏 Galton-Watson 树 $\hat{\tau}$ 按照下面规则来构造: 初始时刻根 $\emptyset$ 按照 $(\hat{p}_k)$ 产生 $\hat{r}_\emptyset$ 个后代, 然后以均等概率从 $\hat{r}_\emptyset$ 个后代中随机选出一个个体 $\xi_1$, 未被选中的个体会按照 $\mathbb{P}$ 的规律独立地产生子树; 而 $\xi_1$ 会按照 $\emptyset$ 的发展规律产生子树 (由于 $\hat{p}_0=0$, $\xi_i$ 总可被选出, $i=1,2,\cdots$), 记第二代被选中的粒子为 $\xi_2$, 记第三代被选中的粒子为 $\xi_3$, 依次类推. 令 $\xi_0=\emptyset$, $\xi=\{\xi_0,\xi_1,\cdots\}$, 称 $\xi$ 为其所在树 $\hat{\tau}$ 的脊柱. 于是得到一个带脊柱的有偏树 $(\hat{\tau},\xi)$. 下图右端树的结构是左端分支树的一个脊柱结构:

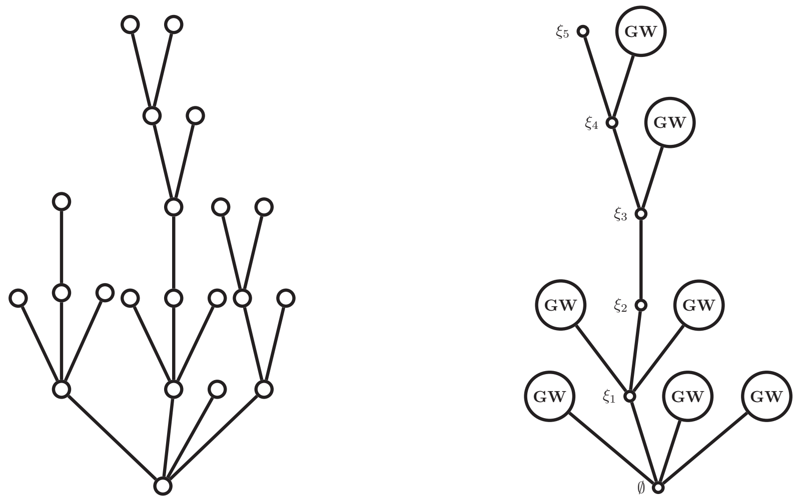


图 2 GW 树和有脊柱的 Galton-Watson 树

设 $\widetilde{Q}$ 是按照上面规律得到的 $(\hat{\tau},\xi)$ 的联合分布, $Q$ 是 $\widetilde{Q}$ 在树空间 $(\mathbb{T},\mathcal{F}_\infty)$ 上的边缘分布, 则在测度 $Q$ 下的树 $\hat{\tau}$ 称为有偏 Galton-Watson 树. 根据有偏树 $\hat{\tau}$ 的构造, 该树的第 $n$ 代粒子的个数有表达式

$$Z_n=1+\sum_{i=1}^{n}Z_n^{(i)},$$

其中 $\{Z_k^{(i)};\ k\geq i\}$, $i\geq 1$, 是一列相互独立、且后代分布都为 p 的 GW 分支过程, 且 $Z_i^{(i)}=\hat{r}_{\xi_{i-1}}-1$, 这种分解称为分支过程的脊柱分解. $Z_n^{(i)}$ 的含义是脊柱中第 $i-1$ 代粒子的后代中除

了 $\xi_i$ 外的 $\hat{r}_{\xi_{i-1}}-1$ 个粒子在第 $n$ 代的后代数, $n \geq i$.

另一方面, Lyons, Pemantle 和 Peres[42] 证明了测度 $Q$ 是 $\mathbb{P}$ 的一个鞅变换. 若 $Z_0=1$, 则 $W_n=\frac{Z_n}{m^n}$ 是均值为 1 的非负鞅, 对任意的 $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{d}Q|_{\mathcal{F}_n}=W_n \mathrm{d}\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_n}. \tag{2.1}$$

这个结论可以从下面的阐述中得到. 设 $\tau$ 表示一棵在第 $n+1$ 代有后代的分支树, 再设 $\mathrm{u}$ 是一个第 $n+1$ 代的粒子. 令 $[\tau;\mathrm{u}]_{n+1}$ 表示一些带有特殊脊柱的树的全体, 使得这些树属于 $[\tau]_{n+1}$ 且脊柱从根 $\emptyset$ 通到 $\mathrm{u}$, 中间没有间断. 设 $\tau$ 的根有 $k$ 个后代, 分别产生子树 $\tau^{(1)},\tau^{(2)},\cdots,\tau^{(k)}$, 粒子 $\mathrm{u}$ 在某个树 $\tau^{(i)}$ 上. 于是,

$$\widetilde{Q}[\tau;\mathrm{u}]_{n+1}=\frac{kp_k}{m}\cdot\frac{1}{k}\widetilde{Q}[\tau^{(i)};\mathrm{u}]_n\prod_{j\neq i}\mathbb{P}[\tau^{(j)}]_n=\frac{p_k}{m}\widetilde{Q}[\tau^{(i)};\mathrm{u}]_n\prod_{j\neq i}\mathbb{P}[\tau^{(j)}]_n.$$

由归纳的方法得到

$$\widetilde{Q}[\tau;\mathrm{u}]_n=\frac{1}{m^n}\mathbb{P}[\tau]_n.$$

进而得到 (2.1), 即

$$Q[\tau]_n=\widetilde{Q}[\tau]_n=\frac{Z_n}{m^n}\mathbb{P}[\tau]_n=W_n\mathbb{P}[\tau]_n.$$

于是在鞅变换测度 $Q$ 下, Galton-Watson 分支过程 $\{Z_n\}$ 有脊柱分解. 现在来介绍如何应用脊柱方法证明 Kesten-Stigum 定理, 为此我们先介绍一个引理:

**引理 2.1** 若 $X,X_1,X_2,\cdots$ 是独立同分布的非负随机变量, 则

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}X_n=\begin{cases}0, & 若E[X]<\infty;\\ \infty, & 若E[X]=\infty.\end{cases} \tag{2.2}$$

**定理 2.2 的证明** 定义 $\sigma$ 域 $\mathcal{G}:=\sigma(Z_i^{(i)}:i\geq 1)$, 表示脊柱上粒子的后代个数信息. 则

$$\widetilde{Q}\big[W_n|\mathcal{G}\big]=\frac{1}{m^n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{Z_i^{(i)}}{m^i}.$$

根据引理 2.1 知,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Z_i^{(i)}}{m^i}<\infty \text{ 当且仅当 } \widetilde{Q}\big[\ln^+ Z_i^{(i)}\big]<\infty, \text{ 或者等价于 } \mathbb{P}[L\ln^+ L]<\infty.$$

另一方面, $\{W_n\}$ 在测度 $\widetilde{Q}$ 下是一个非负下鞅, 故必然有几乎处处极限, 记该极限为 $W$. 由条件期望的 Fatou 引理得: 当且仅当 $\mathbb{P}[L\ln^+ L]<\infty$ 时,

$$\widetilde{Q}\big[W|\mathcal{G}\big]\leq\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Z_i^{(i)}}{m^i}<\infty.$$

故而, 当且仅当 $\mathbb{P}[L\ln^+ L]<\infty$ 时, $W<\infty$, $Q$-a.s. 再由定理 1.1 可知这等价于 $\int W\mathrm{d}\mathbb{P}=1$, 即 $\mathbb{P}[W]=1$.

脊柱方法还可应用在分支过程的其他性质的研究中, 当 Galton-Watson 分支过程是临界或者下临界时, 该过程会在有限时间内灭绝. Geiger[21−22], Roelly-Coppoletta 和 Rouault[48] 证明了在非灭绝条件下的临界或下临界的 GW 分支过程的分布是原过程分布的一个鞅变换, 该条件过程也有脊柱结构, 从而通过这个关系讨论了存活概率的负指数渐近速度. GW 分支过程在恰当的尺度函数加权下取极限, 则可以得到连续状态的分支过程, Lambert[36] 讨论了连续状态分支过程的脊柱结构. 若分支系统中的粒子具有不同的种类, 且不同种类的粒子具有不同的分支机制, 则可以用多物种的分支过程来刻画粒子系统的演变. 脊柱方法不仅可以应用到单物种的分支过程情形, 还可以应用到有限多物种的 Kesten-Stigum 定理的证明. Lyons, Pemantle 和 Peres[42] 的工作是开创性的工作, 之后对与分支过程相关的较复杂模型的许多研究都是建立在这个工作基础之上. 下面先介绍脊柱方法在多物种分支过程方面的一个应用, 然后再介绍一些我们近几年在这方面的研究结果.

### 2.3 多物种分支过程的脊柱结构

现在考虑多物种分支过程, 系统中的粒子可分为 $d$ 种不同的种类, 设种类集为 $\{1,2,\cdots,d\}$. 由于 Galton-Watson 树 $\tau\in\mathbb{T}$ 本身只能表示个体的家庭结构, 为了给出每个粒子的种类特征, 我们假设每个粒子 $\mathrm{u}\in\tau$ 具有一个类型 $X_{\mathrm{u}}$. 我们用 $(\tau,X)$ 表示一棵带类型标记的树, 用 $\mathcal{T}$ 表示这些带类型标记的树的全体. 假设树 $\tau$ 上的粒子可分为 $d$ 种不同的种类, 定义

$$Z_{j,n}(\tau):=\tau \text{ 中长度为 } n \text{ 且类型为 } j \text{ 的粒子的个数}, \quad j=1,2,\cdots,d,$$

及

$$Z_n(\tau)=\left(Z_{1,n}(\tau),Z_{2,n}(\tau),\cdots,Z_{d,n}(\tau)\right).$$

用 $\sigma$- 域 $\mathcal{F}_n$ 表示时刻 $n$ 之前 (包括 $n$ 时刻) 带型标记的树的信息, $\mathcal{F}_\infty=\bigvee_{n\geq 0}\mathcal{F}_n$. 在分支树空间 $(\mathcal{T},\mathcal{F}_\infty)$ 上可以建立一个测度 $\mathbb{P}$, 使得 $Z_n$ 是一个 $d$ 物种的 Galton-Watson 分支过程. 令 $L^{(i,j)}$ 是一个 $i$ 类粒子产生 $j$ 类后代的个数, $i,j=1,2,\cdots,d$. 对于 $\mathrm{k}=(k_1,k_2,\cdots,k_d)$, 令

$$p_{\mathrm{k}}^{(i)}=\mathbb{P}(L^{i,j}=k_j, j=1,2,\cdots,d).$$

设 $m_{ij}=\mathbb{P}\left[L^{(i,j)}\right]$ 是有限的, 且均值矩阵 $M=(m_{ij})$ 是不可约的, 其最大特征根 $\rho>1$. 这类 $d$ 物种的分支过程称为不可约的上临界分支过程. 若 $q_i$ 表示一个 $i$ 类个体产生的 $d$ 物种分支过程的灭绝概率, 则 $q_i<1$, $i=1,2,\cdots,d$. 令 $\mathrm{v}$ 表示对应于 $\rho$ 的期望矩阵 $M$ 的左特征向量, 且 $\sum_{i=1}^d v_i=1$, $\mathrm{u}$ 表示对应于 $\rho$ 的矩阵 $M$ 的右特征向量. 由 Perrons-Frobenius 定理得 $\rho$ 对应的特征向量空间是 1 维的, 且 $v_i,u_i>0$, $i=1,2,\cdots,d$. Kesten-Stigum 定理告诉我们:

**定理 2.3** 存在一个一维随机变量 $W$, 使得下面几乎处处极限存在:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Z_n}{\rho^n}=W\mathrm{v},$$

且 $\mathbb{P}(W>0)>0$ 当且仅当

$$\mathbb{P}\left[\sum_{i,j=1}^d L^{(i,j)}\ln^+ L^{(i,j)}\right]<\infty.$$

用于判别 $d$ 物种分支过程的鞅极限 $W$ 退化性的脊柱方法中的鞅变换是如下定义的: 对任意的分支树 $\tau$, 定义随机变量

$$W_n(\tau)=\rho^{-n}\frac{\mathrm{Z}_n(\tau)\cdot \mathrm{u}}{\mathrm{Z}_0(\tau)\cdot \mathrm{u}}.$$

则过程 $\{W_n\}$ 是一个非负鞅. 于是测度的鞅变换为

$$\mathrm{d}Q\big|_{\mathcal{F}_n}=W_n\mathrm{d}\mathbb{P}\big|_{\mathcal{F}_n}.$$

在新测度下, $d$ 物种分支过程有脊柱分解结构: 设树 $\tau$ 的根的种类为 $l_0$, $l_0\in\{1,2,\cdots,d\}$. 单位时间后, 该粒子死亡, 依照有偏分布

$$\hat{p}_k^{(l_0)}:=\frac{p_k^{(l_0)}k\cdot \mathrm{u}}{\rho u_{l_0}}$$

产生 $k$ 个后代, 可见任意 $i$ 类粒子产生 0 个后代的概率 $\hat{p}_0^{(i)}=0$, $i=1,2,\cdots,d$. 从这些后代中以概率 $\frac{u_i}{k\cdot \mathrm{u}}$ 选择一个种类 $i$ 的粒子作为脊柱中的第 1 代的粒子, $i=1,2,\cdots,d$. 未被选中的粒子会按照 $\mathbb{P}$ 的规律分别独立地产生一个 $d$ 物种的分支树, 设被选中的的粒子种类为 $l_1$, 则该粒子会以概率 $\hat{p}_\cdot^{(l_1)}$ 产生随机个后代, 再从这些粒子中随机地选取脊柱中的第 2 代粒子, 依此类推. 于是, 第 $n$ 代粒子的个数为

$$\mathrm{Z}_n=\mathrm{e}_{l_n}+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Z}_n^{(i)},$$

其中 $\mathrm{e}_{l_n}$ 表示 $d$ 维单位向量: 它的第 $l_n$ 个分量的值为 1, 其他分量的值都是 0, $1\le l_n\le d$; $\mathrm{Z}_n^{[i]}$ 表示脊柱的第 $(i-1)$ 代的粒子产生的后代除去第 $i$ 代的脊柱中粒子后的粒子按照 $\mathbb{P}$ 产生的 $d$ 物种分支过程的在第 $n$ 代 (经过 $(n-i)$ 代演变后) 粒子的个数, $n\ge i$.

**定理 2.3 的证明** 类似于单物种的情形, 令 $\mathcal{G}=\sigma(l_i,\mathrm{Z}_i^{(i)},i=1,2,\cdots)$, 则

$$\widetilde{Q}(W_n|\mathcal{G})=\frac{u_{l_n}}{\rho^n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{Z}_i^{(i)}\cdot \mathrm{u}}{\rho^i}.$$

其中 $\mathrm{Z}_i^{(i)}+\mathrm{e}_{l_i}$, $i=0,1,2,\cdots$ 相互独立、且分别服从有偏后代分布 $(\hat{p}^{(l_{i-1})})$. 因为粒子的种类是有限的, 所以对每个分量分别应用对单物种的处理手法进行分析, 从而可以得到该定理结论.

这部分介绍的内容可以参照 [7], 此外, Georgii 和 Baake[23] 还应用多物种分支过程的脊柱结构分析了每个个体的祖先类型历史问题. Olofsson[44] 还把脊柱方法应用到了更为一般的有有限 $L\log L$ 矩的分支模型的性质的研究上.

如果分支系统中的每个粒子不仅进行分支, 还在空间按照一定的规律进行空间移动, 并且假设每个粒子的寿命是实数值随机变量, 则在任意的时刻 $t$, 我们可以考虑系统中粒子在空间的分布情况. 刻画这类分支系统演变的一类重要概率模型是连续时间的分支 Markov 过程. 具体模型的刻画将在第 3 节给出.

## 3 分支 Markov 过程

### 3.1 分支 Markov 过程定义及其脊柱结构

最初人们考虑的分支 Markov 过程是分支随机游动和分支扩散过程. 在 1968 年和 1969 年, Ikeda, Nagasawa 和 Watanabe[31] 在他们的三篇文章中系统地介绍了一般的分支 Markov 过程.

设 $E$ 是一个局部紧的可分度量空间, 令 $E_\Delta := E \cup \{\Delta\}$ 表示 $E$ 的单点紧化, $\mathcal{B}_E$ 和 $\mathcal{B}_{E_\Delta}$ 分别表示 $E$ 和 $E_\Delta$ 上的 Borel $\sigma$- 域. 对 $E$ 上的任意函数 $f$, 定义 $f(\Delta)=0$, 下面提到的函数 $f$ 都是在这种意义下扩张到 $E_\Delta$ 上的. $E$ 上的有限点测度是指可以表示为 $\mu = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ 的测度 $\mu$, 其中 $x_i \in E$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ (当 $n=0$ 时, $\mu := 0$), 记所有有限点测度组成的集合为 $\mathcal{M}_p(E)$, 则在弱收敛拓扑下, $\mathcal{M}_p(E)$ 是一个局部紧的可分度量空间.

$(E, \mathcal{B}_E)$ 上的分支 Markov 过程是一类取值空间为 $\mathcal{M}_p(E)$ 的马氏过程, 由下面三个最基本的要素组成: (i) $(E, \mathcal{B}_E)$ 上的 Markov 过程 $Y = \{(Y_t, \Pi_x); t \geq 0, x \in E\}$; (ii) 非负可测函数 $\beta : E \to [0, \infty)$; (iii) 对任意的 $x \in E$, 概率测度 $\{p_k(x); k \in \mathbb{N}\}$, 满足对任意整数 $k \geq 0$, $p_k(x)$ 关于 $\mathcal{B}_E$ 可测, 且数学期望 $M(x) := \sum_{k=0}^\infty k p_k(x), x \in E$ 是有限的.

分支 Markov 过程就是分支过程中的粒子在存活期间还独立地进行着空间运动的过程. 于是从 Galton-Watson 树出发, 分支 Markov 过程也可以有树状结构. 分支 Markov 过程可以由有标示的 Galton-Watson 树来刻画, 有标示的 GW 树是指每个个体 u 都有标注 $(Y_{\mathrm{u}}, \sigma_{\mathrm{u}}, r_{\mathrm{u}})$ 的 GW 树, 其中 $\sigma_u$ 是个体 u 的生存时间, 故 u 的死亡时间是 $\zeta_{\mathrm{u}} = \sum_{\mathrm{v} \leq \mathrm{u}} \sigma_{\mathrm{v}}$ $(\zeta_\emptyset = \sigma_\emptyset)$, 出生时间是 $b_{\mathrm{u}} = \sum_{\mathrm{v} < \mathrm{u}} \sigma_{\mathrm{v}}$, $(\sigma_\emptyset = 0)$; $Y_{\mathrm{u}}$: $[b_{\mathrm{u}}, \zeta_{\mathrm{u}}) \to E_\Delta$ 是 u 的运动轨道, 即对任意时刻 $t \in [b_{\mathrm{u}}, \zeta_{\mathrm{u}})$, $Y_{\mathrm{u}}(t)$ 表示个体 u 所在的空间位置; $r_{\mathrm{u}}$ 是粒子 u 在死亡时刻产生的后代个数. 记有标示的 Galton-Watson 树为 $(\tau, Y, \sigma, r)$ (或简记为 $(\tau, N)$), 记所有有标示的 Galton-Watson 树组成的集合为 $\mathcal{T} = \{(\tau, N); \tau \in \mathbb{T}\}$. 在任意有限时间 $t > 0$, 在 $\mathcal{T}$ 上定义 $\sigma$- 代数

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_t := \sigma\big(&\{\mathrm{u}, r_{\mathrm{u}}, \sigma_{\mathrm{u}}, (Y_{\mathrm{u}}(s), s \in [b_{\mathrm{u}}, \zeta_{\mathrm{u}})) : \mathrm{u} \in \tau \in \mathbb{T} \text{ 满足 } \zeta_{\mathrm{u}} \leq t\} \\ &\cup \{\mathrm{u}, (Y_{\mathrm{u}}(s), s \in [b_{\mathrm{u}}, t]) : \mathrm{u} \in \tau \in \mathbb{T} \text{ 且 } t \in [b_{\mathrm{u}}, \zeta_{\mathrm{u}})\}\big);\end{aligned}$$

和 $\sigma$- 代数 $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$. $\mathcal{F}_t$ 是时刻 $t$ 之前树及其上标记的所有信息. 记在时刻 $t$ 树 $\tau$ 中存活的粒子组成的集合为 $L_t(\tau) = \{\mathrm{u} \in \tau; b_{\mathrm{u}} \leq t < \zeta_{\mathrm{u}}\}$, 在有标示的 GW 树空间 $(\mathcal{T}, \mathcal{F}_\infty)$ 上存在概率测度 $\mathbb{P}^x$ 满足 $Y_\emptyset(0) \equiv x$, 且在测度 $\mathbb{P}^x$ 下,

(i) 在已知 u 在时刻 $t$ 存活以及时刻 $t$ 前的轨迹 $Y_{\mathrm{u}}(s), s \in [0, t]$ 的条件下, 粒子 u 在区间 $[t, t + \mathrm{d}t)$ 死亡的概率是 $\beta(Y_{\mathrm{u}}(t))\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t)$, 通常称 $\beta$ 为分支速率函数.

(ii) 在给定 $Y_{\mathrm{u}-1}(\zeta_{\mathrm{u}-1}-)$ 和 $b_{\mathrm{u}}$ 的条件下, $\{Y_{\mathrm{u}}(t); t \in [b_{\mathrm{u}}, \zeta_{\mathrm{u}})\}$ 是一个在时刻 $b_{\mathrm{u}}$ 出生, 从点 $Y_{\mathrm{u}-1}(\zeta_{\mathrm{u}-1}-)$ 出发的按分布率 $\Pi_{Y_{\mathrm{u}-1}(\zeta_{\mathrm{u}-1}-)}$ 运动的 Markov 过程. 同时生存的粒子在 $E$ 中运动独立. $Y$ 称为底过程.

(iii) 若粒子 u 在 $x$ 点死亡, 粒子 u 产生的后代数 $r_{\mathrm{u}}$ 服从分布: $\mathbb{P}^x(r_{\mathrm{u}} = k) = p_k(Y_{\mathrm{u}}(\zeta_{\mathrm{u}}-))$, $k \in \{0, 1, \cdots\}$. 新生的粒子在点 $Y_{\mathrm{u}}(\zeta_{\mathrm{u}})$ 按照父辈的规律独立地发展.

在测度 $\mathbb{P}^x$ 下, 计数过程

$$X_t = \sum_{\mathrm{u} \in L_t} \delta_{Y_{\mathrm{u}}(t)}$$

就是一个初值为 $\delta_x$ 的关于 $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ 适应的分支 Markov 过程. 更一般地, 对任意的 $\mu = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in \mathcal{M}_p(E) \setminus \{0\}$, 我们可以构造从 $\mu$ 出发的分支马氏过程: 以 $n$ 个初始位置分别是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的粒子为祖先, 按上面的机制独立地演变. 设 $X_t^i$ 表示初始时在点 $x_i$ 的粒子为祖先产生的分支马氏过程, 则 $X_t = \sum_{i=1}^n X_t^i$ 就是一个初始时 $X_0 = \mu$ 的取值于 $\mathcal{M}_p(E)$ 的马氏过程, 用 $\mathbb{P}^\mu$ 表示此过程的分布, 显然 $\mathbb{P}^{\delta_x} = \mathbb{P}^x$.

若底过程 $Y$ 是一个 Hunt 过程, 则称 $X$ 为分支 Hunt 过程. 特别地, 若底过程 $Y$ 是一个随机游动, 则称 $X$ 为一个分支随机游动; 若 $Y$ 是一个扩散过程, 则称 $X$ 为一个分支扩散过程; 若

$Y$ 是一个布朗运动, 则称 $X$ 为一个分支布朗运动.

令 $\{P_t; t \geq 0\}$ 表示 $Y$ 的转移半群, 即

$$P_t h(x) = \Pi_x[h(Y_t)], \quad h \in \mathcal{B}^+(E).$$

设 $\mathbf{A}$ 是 $\{P_t, t \geq 0\}$ 的无穷小生成元, 定义后代分布的母函数为 $\psi(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)\lambda^k$, $\lambda \in [0,1]$, 则 $X$ 的转移半群的 Laplace 泛函为: 对 $E$ 上任意的非负可测函数 $f$,

$$u(t,x) := \mathbb{P}^x \left[\exp\{-\langle f, X_t\rangle\}\right] \tag{3.1}$$

是下面发展方程的最小非负解:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{A}u + \beta(x)(\psi(u) - u); \\ u(0,x) = \mathrm{e}^{-f(x)}. \end{cases} \tag{3.2}$$

可见分支 Markov 过程的分布由三个因素唯一决定, 即由底过程 $Y$, 分支率 $\beta$ 和分支机制 $\psi$ 决定. 记满足上面条件的分支 Markov 过程为 $(Y, \beta, \psi)$- 分支 Markov 过程.

若底空间 $E$ 是实数空间 $\mathbb{R}$, 底过程是布朗运动, 无穷小生成元 $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, 假设后代分布不依赖于空间位置, 则 (3.1) 中的发展方程可以写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\left(\psi(u) - u\right), \tag{3.3}$$

其中 $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to [0,1]$. 该类方程称为 Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piskounov 方程, 简称为 FKPP 方程.

设 $E$ 上存在一个有全支撑的正 Radon 测度 $m$, 且 $\{P_t; t \geq 0\}$ 是 $L^2(E,m)$ 上的一族强连续半群, $\{\widehat{P}_t; t \geq 0\}$ 是 $\{P_t; t \geq 0\}$ 在 $L^2(E,m)$ 上的对偶半群, 则

$$\int_E h(x) P_t g(x) m(\mathrm{d}x) = \int_E g(x) \widehat{P}_t h(x) m(\mathrm{d}x), \quad h, g \in L^2(E,m).$$

记 $\mathbf{A}$ 和 $\widehat{\mathbf{A}}$ 分别为 $\{P_t; t \geq 0\}$ 和 $\{\widehat{P}_t; t \geq 0\}$ 在空间 $L^2(E,m)$ 中的无穷小生成元. 注意我们已经定义函数 $M(x) = \sum_k k p_k(x)$, $x \in E$, 表示分支过程后代分布的期望函数, 假设 $M$ 是 $E$ 上的一个有界可测函数. 定义 Feynman-Kac 半群 $\{P_t^{(M-1)\beta}; t \geq 0\}$:

$$P_t^{(M-1)\beta} h(x) := \Pi_x\left[h(Y_t)\exp\left(\int_0^t ((M-1)\beta)(Y_r)\mathrm{d}r\right)\right], \quad h \in \mathcal{B}^+(E). \tag{3.4}$$

则对任意的初值 $X_0 = \mu \in \mathcal{M}_F(E)$ 和非负可测函数 $f$, 下面期望公式成立:

$$\mathbb{P}^\mu \langle f, X_t\rangle = \langle P_t^{(M-1)\beta} f, \mu\rangle. \tag{3.5}$$

同时, 我们可以得到 $\{P_t^{(M-1)\beta}; t \geq 0\}$ 和 $\{\widehat{P}_t^{(M-1)\beta}; t \geq 0\}$ 在 $L^2(E,m)$ 空间中的无穷小生成元分别为 $\mathbf{A} + (M-1)\beta$ 和 $\widehat{\mathbf{A}} + (M-1)\beta$. 记 $\lambda_1$ 为 $\mathbf{A} + (M-1)\beta$ 和 $\widehat{\mathbf{A}} + (M-1)\beta$ 共同的主特征值, $\phi$ 和 $\widetilde{\phi}$ 分别是它们的相应于 $\lambda_1$ 的特征函数. 则可选取 $\phi$ 和 $\widetilde{\phi}$, 使得 $\phi, \widetilde{\phi} \geq 0$, $m$-a.s., 且

$$\phi(x) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} P_t^{(M-1)\beta}\phi(x), \quad \widetilde{\phi}(x) = \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\widehat{P}_t^{(M-1)\beta}\widetilde{\phi}, \quad x \in E. \tag{3.6}$$

此外, 设这些半群还满足下面的假设:

**假设 1** (1) 在 $E\times E$ 上, 存在 $Y$ 的一族严格正的连续转移密度函数 $\{p(t,\cdot,\cdot);t>0\}$, 即对任意的 $(t,x)\in(0,\infty)\times E$,

$$P_tf(x)=\int_E p(t,x,y)f(y)m(\mathrm{d}y),\quad \widehat{P}_tf(x)=\int_E p(t,y,x)f(y)m(\mathrm{d}y).$$

(2) 半群 $\{P_t^{(M-1)\beta};t\geq 0\}$ 和 $\{\widehat{P}_t^{(M-1)\beta};t\geq 0\}$ 是 U- 超压缩的 (ultracontractive), 即对任意的 $t>0$, 存在 $c_t>0$ 使得

$$p(t,x,y)\leq c_t,\quad (x,y)\in E\times E.$$

(3) 半群 $\{P_t^{(M-1)\beta};t\geq 0\}$ 和 $\{\widehat{P}_t^{(M-1)\beta};t\geq 0\}$ 满足内 U- 超压缩性质 (intrinsic ultracontractive property), 即对任意的 $t>0$, 存在 $c_t>0$ 使得

$$p^{(M-1)\beta}(t,x,y)\leq c_t\phi(x)\widetilde{\phi}(y),\quad (x,y)\in E\times E. \tag{3.7}$$

在这些条件下可以证明 $\phi,\widetilde{\phi}$ 在 $E$ 上是严格正的, 我们选取 $\phi,\widetilde{\phi}$ 使得 $\int_E\phi(x)\widetilde{\phi}(x)m(\mathrm{d}x)=1$. 进一步假设初始测度 $\mu$ 满足 $\langle\phi,\mu\rangle>0$, 定义过程

$$M_t(\phi):=\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\frac{\langle\phi,X_t\rangle}{\langle\phi,\mu\rangle},\quad t\geq 0. \tag{3.8}$$

则 $\{M_t(\phi);t\geq 0\}$ 是一个关于 $\{\mathcal{F}_t,t\geq 0\}$ 的 $\mathbb{P}^\mu$- 非负鞅, 从而有几乎处处极限, 记为 $M_\infty(\phi)$. 若该鞅没有退化为 0, 则该分支 Markov 过程有指数的增长速度. 在这个意义上, 有必要来判断该极限是否退化.

Harris 和 Robert[29] 以有标示的 Galton-Watson 树组成的空间为分支 Markov 过程 $X$ 的概率空间, 系统地介绍了当后代分布满足 $p_0(x)=0$, $x\in E$ 时, $X$ 的脊柱结构. 对任意的 $\tau\in\mathbb{T}$, 选择一个家系 $\xi=\{\xi_0=\emptyset,\ \xi_1,\xi_2,\cdots\}$, 其中 $\xi_{n+1}\in\tau$ 是 $\xi_n\in\tau$ 的一个后代, $n=0,1,\cdots$. 称这样的一个家系为树 $\tau$ 的一个脊柱, 记有标示的脊柱为 $(N,\xi)$. 设 $\mathrm{u}$ 是 $\tau$ 中的一个粒子, 若存在一个 $i\geq 0$, 使得 $\mathrm{u}=\xi_i$, 则记 $\mathrm{u}\in\xi$. 记所有带脊柱的有标示 Galton-Watson 树组成的集合为

$$\widetilde{\mathcal{T}}=\{(\tau,Y,\sigma,r,\xi);\ \xi\subset\tau\in\mathbb{T}\}.$$

若 $\widetilde{Y}=\{\widetilde{Y}_t;t\geq 0\}$ 表示这个脊柱的空间轨道, 那么 $\widetilde{Y}_t$ 表示脊柱在时刻 $t$ 的空间位置. 记脊柱在时刻 $t$ 之前的分支次数为 $n_t$, 于是 $\mathrm{u}\in L_t\cap\xi$ 时, $\widetilde{Y}_t=Y_{\mathrm{u}}(t)$, $n_t=|\mathrm{u}|$. 故在 $\mathbb{P}^x$ 下过程 $\{\widetilde{Y}_t;t\geq 0\}$ 是一个分布为 $\Pi_x$ 的 Markov 过程. 若 $\mathrm{node}_t((\tau,N,\xi))$ 或 $\mathrm{node}_t(\xi)$ 表示脊柱中在时刻 $t$ 存活的粒子或结点, 则

$$\mathrm{node}_t(\xi):=\mathrm{node}_t((\tau,N,\xi)):=\mathrm{u},\quad 若\ \mathrm{u}\in\xi\cap L_t,$$

显然 $\mathrm{node}_t(\xi)=\xi_{n_t}$.

令 $\widetilde{\mathcal{F}}_t$ 是带脊柱的有标示 GW 树在时刻 $t$ 之前的所有信息组成的 $\sigma$ 域, $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty=\bigvee_{t\geq 0}\widetilde{\mathcal{F}}_t$. 则在 $(\widetilde{\mathcal{T}},\widetilde{\mathcal{F}}_\infty)$ 上可以定义一个概率测度 $\widehat{\mathbb{P}}^x$ 使得粒子的寿命、运动、产生后代的分布与在 $\mathbb{P}^x$ 下的机制一致, 即前面的 (i), (ii) 和 (iii) 保持不变; 同时满足脊柱上粒子是从脊柱上粒子的后代中等可能选取, 即若 $\mathrm{v}\in\xi$ 且在死亡时刻 $\zeta_{\mathrm{v}}$ 产生 $r_{\mathrm{v}}$ 个后代, 脊柱中 $\mathrm{v}$ 的下一个粒子在这些后代中均

等地选取. 令 $O_{\mathrm{v}}$ 表示 v 的未被选中的后代组成的集合, 若 $\mathrm{v}j \in O_{\mathrm{v}}$, 则 $(\tau,N)_j^{\mathrm{v}}$ 表示以 $\mathrm{v}j$ 为根的有标示的 GW 树. 设 $\widehat{\mathbb{P}}^x$ 是这样构造的有脊柱的标示 GW 树的分布, 那么沿着脊柱, $\widehat{\mathbb{P}}^x$ 可以如下定义: 在 $\widetilde{\mathcal{F}}_\infty$ 上,

$$\mathrm{d}\widehat{\mathbb{P}}^x(\tau,N,\xi)\big|_{\widetilde{\mathcal{F}}_t} = \mathrm{d}\Pi_x\big(\widetilde{Y}\big)\mathrm{d}L^{\beta(\widetilde{Y})}(\mathrm{n}) \prod_{\mathrm{v}<\xi_{n_t}} p_{r_{\mathrm{v}}}\big(\widetilde{Y}_{\zeta_{\mathrm{v}}}\big) \prod_{\mathrm{v}<\xi_{n_t}} \frac{1}{r_{\mathrm{v}}} \prod_{\{j:\mathrm{v}j\in O_{\mathrm{v}}\}} \mathrm{d}\mathbb{P}_{t-\zeta_{\mathrm{v}}}^{\widetilde{Y}_{\zeta_{\mathrm{v}}}}\big((\tau,N)_j^{\mathrm{v}}\big), \tag{3.9}$$

其中 $L^{\beta(\widetilde{Y})}(\mathrm{n})$ 是沿着轨道 $\widetilde{Y}$ 的强度测度为 $\beta(\widetilde{Y}_t)\mathrm{d}t$ 的 Poisson 点过程 $\mathrm{n}=\{n_t;t\geq 0\}$ 的分布, $\Pi_x$ 是从 $x\in E$ 出发的 $\widetilde{Y}$ 的分布, $p_{r_{\mathrm{v}}}(y)=\sum_{k\geq 1}p_k(y)I_{\{r_{\mathrm{v}}=k\}}$ 是已知粒子 $\mathrm{v}\in\xi$ 在点 $y\in E$ 发生分支时产生 $r_{\mathrm{v}}$ 个后代的概率, $\mathbb{P}_t^x$ 表示从 $x$ 点出发的有标示 GW 树在时刻 $t$ 之前的概率分布. 前面的构造过程可见测度 $\mathbb{P}^x$ 是测度 $\widehat{\mathbb{P}}^x$ 在 $(\mathcal{T},\mathcal{F}_\infty)$ 上的投影.

**注** 若允许 $p_0(x)>0$, 则前面的叙述仍然成立, 只是有可能脊柱在有限时间死亡. 我们后面用到的实际是 $p_0(x)\equiv 0$ 的情形.

### 3.2 上临界分支 Hunt 过程的 $L\log L$ 条件

设 $X=\{X_t;t\geq 0\}$ 是测度空间 $(E,\mathcal{B}_E,m)$ 上的一个 $(Y,\beta,\psi)$- 分支 Markov 过程. 过程

$$\left\{M_t(\phi) := \frac{\langle\phi,X_t\rangle}{\langle\phi,\mu\rangle}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}; t\geq 0\right\}$$

是 (3.8) 定义的鞅, 则该鞅几乎处处收敛到某个极限 $M_\infty(\phi)$. 令 $\ln^+ t=\ln t\vee 0,\ t>0$. Asmussen 和 Hering[5] 对分支扩散过程找到了一个 $L\log L$ 判定准则: 设 $D\subset\mathbb{R}^d$ 是一个有界 $C^3$- 区域, 当分支 Markov 过程的底过程 $Y$ 是 $D$ 上的一个正则扩散过程时, $M_t(\phi)$ 的极限 $M_\infty(\phi)$ 非退化的充要条件是

$$\int_D m(\mathrm{d}y)\widetilde{\phi}(y)\beta(y)\sum_n p_n(y)(n\phi(y))\ln^+(n\phi(y))<\infty. \tag{3.10}$$

[5] 中的证明主要是用分析的方法, 脊柱方法也可以用来证明这个 $L\log L$ 准则. 下面我们来介绍这种证明方法.

假设 $X$ 是一个分支 Hunt 过程, $\lambda_1>0$, 即该过程是上临界的, 其底过程 $Y$ 满足第 3.1 节中的假设 1. 注意我们选取的特征函数 $\phi,\widetilde{\phi}$ 满足 $\int_E\phi(x)\widetilde{\phi}(x)m(\mathrm{d}x)=1$, 则关于 $X$ 对应的鞅 $\{M_t(\phi)\}$ 下面的结论成立.

**定理 3.1** 设 $\{X_t;t\geq 0\}$ 是一个 $(Y,\beta,\psi)$- 分支 Hunt 过程, 而且满足假设 1. 定义

$$l(x)=\sum_{k=1}^\infty k\phi(x)\ln^+(k\phi(x))\,p_k(x),\quad x\in E. \tag{3.11}$$

则对任意的 $\mu\in\mathcal{M}_p(E)\backslash\{0\}$, $M_\infty(\phi)$ 是 $L^1(\mathbb{P}^\mu)$ 极限的充要条件是

$$\int_E\beta(x)l(x)\widetilde{\phi}(x)m(\mathrm{d}x)<\infty. \tag{3.12}$$

根据分支性质, 我们只需对 $\mu=\delta_x$ 的情形给出证明. 该定理的证明是基于测度 $\mathbb{P}^x$ 的鞅变换

$$\mathrm{d}Q^x|_{\mathcal{F}_t}=M_t(\phi)\mathrm{d}\mathbb{P}^x|_{\mathcal{F}_t}$$

下分支 Hunt 过程的脊柱分解. 为了便于介绍在 $Q^x$ 下分支 Hunt 过程的脊柱结构, 先引入一些概念和一些结论. 定义过程

$$\widetilde{\eta}_t^{(3)}(\phi) := \phi(\widetilde{Y}_t)\exp\left(-\int_0^t (\lambda_1 - (M-1)\beta)(\widetilde{Y}_s)\mathrm{d}s\right)$$

和 $\sigma$ 域流 $\mathcal{G}_t := \sigma(\widetilde{Y}_s : 0 \le s \le t)$, 则 $\widetilde{\eta}_t^{(3)}(\phi)$ 是一个关于 $\{\mathcal{G}_t; t \ge 0\}$ 的 $\Pi_x$- 非负鞅. 定义 $\mathcal{G} = \bigvee_{t\ge 0}\mathcal{G}_t$ 上测度 $\Pi_x$ 的鞅变换:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Pi_x^\phi}{\mathrm{d}\Pi_x}\right|_{\mathcal{G}_t} = \phi(x)^{-1}\widetilde{\eta}_t^{(3)}(\phi).$$

则在新测度 $\Pi_x^\phi$ 下, 过程 $\widetilde{Y}$ 是一个遍历的马氏过程, 且 $\phi(x)\widetilde{\phi}(x)$ 是其转移半群的唯一不变概率密度函数. 假设转移半群 $P_t^{(M-1)\beta}$ 的密度函数为 $p^{(M-1)\beta}(t,x,y)$, $t > 0$, 即对任意的 $h \in \mathcal{B}^+(E)$,

$$P_t^{(M-1)\beta}h(x) = \int_E p^{(M-1)\beta}(t,x,y)h(y)m(\mathrm{d}y).$$

则 $(Y, \Pi_x^\phi)$ 有转移密度函数族 $p^\phi(t,x,y)$, 其表达式为

$$p^\phi(t,x,y) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}}{\phi(x)}\, p^{(M-1)\beta}(t,x,y)\phi(y).$$

在内 U- 超压缩性条件 (3.7) 下, 可以证明存在正常数 $c$ 和 $\nu$, 使得

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}p^{(M-1)\beta}(t,x,y)}{\phi(x)\widetilde{\phi}(y)} - 1\right| \le c\,\mathrm{e}^{-\nu t}, \quad x \in E,\ t > 1.$$

这说明转移密度函数 $\{p^\phi(t,x,y); t > 0, x, y \in E\}$ 是一致收敛到不变概率密度函数 $\phi(x)\widetilde{\phi}(x)$ 的.

**引理 3.1** 设给定轨道 $\widetilde{Y}$, $\mathrm{n} = \{n_t; t \ge 0\}$ 是一个瞬时强度为 $\beta(\widetilde{Y}_t)$ 的 Poisson 过程, $\zeta_i, i = 1, 2, \cdots$, 是 n 发生第 $i$ 次跳的时刻, 则

$$\eta_t^{(1)} := \prod_{i \le n_t} M(\widetilde{Y}_{\zeta_i}) \cdot \exp\left(-\int_0^t ((M-1)\beta)(\widetilde{Y}_s)\mathrm{d}s\right)$$

是一个 $L^{\beta(\widetilde{Y})}$- 鞅.

令 $\mathcal{L}_t = \sigma(n_s : s \le t)$, $\mathcal{L} = \bigvee_{t \ge 0}\mathcal{L}_t$. 在给定轨道 $\widetilde{Y}$ 的条件下, 定义 $\mathcal{L}$ 上的鞅变换概率测度 $L^{(M\beta)(\widetilde{Y})}$,

$$\left.\frac{\mathrm{d}L^{(M\beta)(\widetilde{Y})}}{\mathrm{d}L^{\beta(\widetilde{Y})}}\right|_{\mathcal{L}_t} = \prod_{i \le n_t} M(\widetilde{Y}_{\zeta_i}) \cdot \exp\left(-\int_0^t ((M-1)\beta)(\widetilde{Y}_s)\mathrm{d}s\right).$$

容易检验在 $L^{(M\beta)(\widetilde{Y})}$ 下, n 变成一个强度函数为 $M\beta$ 的 Poisson 过程.

定义有偏后代分布 $\hat{p}_k$:

$$\hat{p}_k(y) = \frac{kp_k(y)}{M(y)}, \quad k \ge 0,\ y \in E.$$

在 $(\widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathcal{F}}_\infty)$ 上可以定义一个概率测度 $\widetilde{Q}^x$ 使得

(i) 脊柱的运动轨道 $\{\widetilde{Y}_t; t \ge 0\}$ 按照 $\Pi_x^\phi$ 来发展;

(ii) 在给定 $\widetilde{Y}_t$ 的条件下, 脊柱的分支时刻构成的随机点过程是一个瞬时强度为 $(M\beta)(\widetilde{Y}_t)$ 的点过程;

(iii) 当粒子 $\mathrm{v} \in \xi$ 在 $\zeta_{\mathrm{v}}$ 时刻死亡时, 它在点 $\widetilde{Y}_{\zeta_{\mathrm{v}}}$ 产生 $r_{\mathrm{v}}$ 个后代, $r_{\mathrm{v}}$ 服从分布 $\hat{p}(\widetilde{Y}_{\zeta_{\mathrm{v}}})$;

(iv) 从 v 的 $r_{\mathrm{v}}$ 个后代中等可能地选取一个粒子作为脊柱中的下一代粒子 (由于 $\hat{p}_0 = 0$, $\xi_i$ 总可被选出);

(v) v 的后代中未被选中的 $r_{\mathrm{v}} - 1$ 个粒子 $\mathrm{v}j \in O_{\mathrm{v}}$ 按照 $\mathbb{P}^{\widetilde{Y}_{\zeta_{\mathrm{v}}}}$ 独立地生成子树 $(\tau, M)_j^{\mathrm{v}}$.

那么沿着脊柱, $\widetilde{Q}^x$ 可以表示成:

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\widetilde{Q}^x(\tau, N, \xi)\Big|_{\widetilde{\mathcal{F}}_t} \\ &\quad = \mathrm{d}\Pi_x^{\phi}(\widetilde{Y})\mathrm{d}L^{M\beta(\widetilde{Y})}(\mathrm{n}) \prod_{\mathrm{v}<\xi_{n_t}} \hat{p}_{r_{\mathrm{v}}}(\widetilde{Y}_{\zeta_{\mathrm{v}}}) \prod_{\mathrm{v}<\xi_{n_t}} \frac{1}{r_{\mathrm{v}}} \prod_{\{j:\mathrm{v}j\in O_{\mathrm{v}}\}} \mathrm{d}\mathbb{P}_{t-\zeta_{\mathrm{v}}}^{\widetilde{Y}_{\zeta_{\mathrm{v}}}}\left((\tau, N)_j^{\mathrm{v}}\right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

定义测度 $\widetilde{Q}^x$ 在 $(\mathcal{T}, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ 上的投影测度 $Q^x := \widetilde{Q}^x|_{\mathcal{F}}$. [24] 中的定理 6.4 说明了测度 $Q^x$ 就是 (3.8) 中定义的 $\mathbb{P}^x$ 的关于 $M_t(\phi)$ 的鞅变换, 也就是说,

$$\frac{\mathrm{d}Q^x}{\mathrm{d}\mathbb{P}^x}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = M_t(\phi).$$

**定理 3.2** (脊柱分解) 定义表示脊柱所有信息的 $\sigma$ 域:

$$\widetilde{\mathcal{G}} = \sigma\big(\widetilde{Y}, \mathrm{node}_t(\xi), \zeta_{\mathrm{u}}, \mathrm{u} < \mathrm{node}_t(\xi), r_{\mathrm{u}}, \mathrm{u} < \mathrm{node}_t(\xi), 0 \leq t < \infty\big).$$

则在测度 $\widetilde{Q}^x$ 下, $M_t(\phi), t > 0$, 有下面的脊柱分解:

$$\widetilde{Q}^x\big[\phi(x)M_t(\phi)\big|\widetilde{\mathcal{G}}\big] = \phi(\widetilde{Y}_t)\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + \sum_{\mathrm{u}<\xi_{n_t}} (r_{\mathrm{u}} - 1)\phi(\widetilde{Y}_{\zeta_{\mathrm{u}}})\mathrm{e}^{-\lambda_1\zeta_{\mathrm{u}}}. \tag{3.14}$$

判别鞅极限 $M_\infty(\phi)$ 非退化的另一个基础是下面的类似于引理 2.1 的极限结果.

**引理 3.2** 简记 $\zeta_i := \zeta_{\xi_i}$, $r_i := r_{\xi_i}$.

(i) 若 $\int_E \beta(y)l(y)\widetilde{\phi}(y)m(\mathrm{d}y) < \infty$, 则

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_1\zeta_i} r_i \phi(\widetilde{Y}_{\zeta_i}) < \infty, \quad \widetilde{Q}^x\text{-a.s.} \tag{3.15}$$

(ii) 若 $\int_E \beta(y)l(y)\widetilde{\phi}(y)m(\mathrm{d}y) = \infty$, 则

$$\limsup_{i\to\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_1\zeta_i} r_i \phi(\widetilde{Y}_{\zeta_i}) = \infty, \quad \widetilde{Q}^x\text{-a.s.} \tag{3.16}$$

在上面两个结论的基础上, 与分支过程的讨论类似, 通过在测度的鞅变换下极限 $M_\infty(\phi)$ 的有限性来讨论在原测度下的非退化性质.

**定理 3.3** 设 $\{X_t; t \geq 0\}$ 是一个 $(Y, \beta, \psi)$- 分支 Hunt 过程, 满足假设 1, 则对任意的 $\mu \in \mathcal{M}_p(E)\backslash\{0\}$, $M_\infty(\phi)$ 是 $L^1(\mathbb{P}^\mu)$ 极限的充要条件是

$$\int_E \beta(x)l(x)\widetilde{\phi}(x)m(\mathrm{d}x) < \infty. \tag{3.17}$$

应用分支 Markov 过程的脊柱分解来讨论上临界情形的增长速度问题的文献可以参考 [16–17].

## 4 超扩散

### 4.1 超扩散的定义

先来介绍超布朗运动. 超布朗运动首先在文章 [9] 和 [54] 中被构造出来, 后来在一系列的文献中从不同的角度被刻画, 如 Aldous [3–4], Dawson [10], Duquesne 和 Le Gall [11], Dynkin [13–14], Le Gall [37], Li [39] 和 Perkins [46]. 令 $\mathcal{M}_F(E)$ 表示 $E$ 上的所有有限测度的集合, 若底空间 $E$ 是一个 Polish 空间, 则在测度的弱收敛拓扑下, $\mathcal{M}_F(E)$ 也是一个 Polish 空间. 有一类超布朗运动是取值空间为 $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$ 的测度值马氏过程. 我们从作为分支布朗运动的极限的角度来刻画和描述这类超布朗运动.

给定 $\mathbb{R}^d$ 上的一个分支布朗运动 $X^\varepsilon=\{X^\varepsilon_t;t\ge 0\}$. 设 $\varepsilon>0$, 每个粒子的质量为 $\varepsilon$, 分支率为 $\frac{\beta}{\varepsilon}$, 则在任意时刻 $t\ge 0$, 系统中粒子的质量分布为 $\widehat{X}^\varepsilon_t:=\varepsilon X^\varepsilon_t$. 对给定的 $\mu\in\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$, 存在 $\widehat{X}^\varepsilon_0$, 使得当 $\varepsilon$ 趋于 0 时, $\widehat{X}^\varepsilon_0$ 弱收敛到 $\mu$. 若 $X^\varepsilon$ 的分支机制满足一定的条件, 则测度值过程 $\widehat{X}^\varepsilon$ 的分布弱收敛到一个初值为 $\mu$ 的 $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$ 值的 Markov 过程, 且在分布意义上该过程唯一. 记该极限过程为 $X=\{X_t;t\ge 0\}$, 则 $X$ 是一个马氏过程, 其转移概率的 Laplace 泛函可以由一个非线性偏微分方程唯一确定: 对任意的 $f\in C_b(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathbb{P}_\mu(\exp\{-\langle f,X_t\rangle\})=\exp\{-\langle u_t(f),\mu\rangle\}, \tag{4.1}$$

其中 $\langle f,X_t\rangle$ 表示积分 $\int f(x)X_t(\mathrm{d}x)$, $u_t(f)$ 是下面非线性方程的唯一解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_t(f)}{\partial t}=\dfrac{1}{2}\triangle u_t(f)-\psi(u_t(f));\\ u_0(f)=f.\end{cases} \tag{4.2}$$

可以证明上面非线性微分方程中的非线性函数 $\psi$ 一定具有下面形式:

$$\psi(x,\lambda)=\alpha(x)\lambda+\beta(x)\lambda^2+\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-\lambda r}-1+\lambda r)n(x,\mathrm{d}r), \tag{4.3}$$

其中 $\alpha$, $\beta$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的可测函数, $\beta$ 是非负的, $n$ 是从 $\mathbb{R}^d$ 到 $(0,\infty)$ 的一个可测核. 我们称 $\psi$ 为超布朗运动的分支机制. 在 [14] 中, Dynkin 证明了当 $\alpha$, $\beta$ 有界且 $\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_0^\infty r\wedge r^2 n(x,\mathrm{d}r)<\infty$ 时, 以 $\psi$ 为分支机制的超过程存在. 实际上 Dynkin[14] 还考虑了分支机制依赖于时间的超布朗运动. 本文仅介绍时齐的超布朗运动, 故总是假设分支机制不依赖于时间参数.

函数 $u_t$ 与 $X$ 的这种关系是对偶关系. 通过对 Laplace 泛函求导得: 对任意的 $f\in\mathcal{B}_b(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathbb{P}_\mu[\langle f,X_t\rangle]=\big\langle \Pi_\cdot\big(f(Y_t)\mathrm{e}^{-\int_0^t\alpha(Y_s)\mathrm{d}s}\big),\mu\big\rangle, \tag{4.4}$$

其中 $Y=(Y_t,\Pi_x)$ 为从 $x$ 出发的布朗运动, 该公式称为超过程的期望公式.

底空间 $\mathbb{R}^d$ 可以推广到一般的一个 Polish 空间 $E$, 底过程 $Y$ 可以选为 $E$ 上任意的一个 Hunt 过程, 此时的过程 $X$ 统称为超过程或 $(Y,\psi)$- 超过程. 若 $Y$ 是一个扩散过程, 则称该过程为超扩散. 设 $Y$ 是区域 $D\subset\mathbb{R}^d$ 上的一个扩散过程, 其无穷小生成元 $\mathbf{L}$ 由下面给定:

$$\mathbf{L}=\frac{1}{2}\nabla\cdot a\nabla+b\cdot\nabla,$$

其中 $a_{ij}$, $b_i \in C^{1,\eta}(D)$, $i, j = 1, 2, \cdots, d$, $\eta \in (0, 1]$, 而且对任意的 $x \in D$, 矩阵 $a(x) = (a_{ij}(x))$ 是一个对称正定矩阵. 则 $(Y, \psi)$- 超扩散 $(X_t, \mathbb{P}_\mu)$ 是 $\mathcal{M}_F(D)$ 上的一个测度值马氏过程, $\mu \in \mathcal{M}_F(D)$. $X$ 的转移概率的 Laplace 泛函为: 对任意的 $f \in \mathcal{B}_b(D)$,

$$\mathbb{P}_\mu\left(\exp\{-\langle f, X_t\rangle\}\right) = \exp\left(-\langle u_t(f), \mu\rangle\right), \tag{4.5}$$

其中 $u_t(f)$ 是下面非线性方程的唯一解:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_t(f)}{\partial t} = \mathbf{L}u_t(f) - \psi(u_t(f)); \\ u_0(f) = f. \end{cases} \tag{4.6}$$

这在形式上与超布朗运动是完全一样的, 进而我们也可以得到期望公式 (4.4). 而这又与分支扩散的期望公式 (3.5) 形式上是相同的, 所以关于超扩散我们也可以得到一个非负鞅.

$$M_t(\phi) := \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\frac{\langle \phi, X_t\rangle}{\langle \phi, \mu\rangle}, \quad t \geq 0. \tag{4.7}$$

其中 $\lambda_1$ 为 $\mathbf{L} + \alpha$ 的主特征值, $\phi$ 是相应的正的特征函数.

对超过程的刻画除了用上面的方式外, 还有从随机积分方面刻画的, 可参见 [46]; 或者从树状结构来刻画的, 可参见 [3–4, 11, 37], 从而在抽象的树状结构上也可以刻画超过程的脊柱结构. 或者可以从 Palm 测度理论来刻画这种结构, 可参见 [10, 46]. 在考虑超过程的不同问题时, 不同的表示方法分别起到不同的作用.

从超扩散的 Laplace 泛函可以得到, 超扩散是 $\mathcal{M}_F(\mathbb{R}^d)$ 空间上的一个无穷可分的过程. 对任意的 $x \in \mathbb{R}^d$, 简记 $\mathbb{P}_{\delta_x}$ 为 $\mathbb{P}_x$. 令 $\mathbb{N}_x$ 表示 $\psi$- 超布朗运动 $(X_t, t \geq 0; \mathbb{P}_x)$ 的 Dynkin-Kuznetsov $\mathbb{N}$- 测度 (可参见 [15]), 则对任意的 $f \in C_b^+(\mathbb{R}^d)$ 和 $t > 0$,

$$\mathbb{N}_x\big(1 - \mathrm{e}^{-\langle f, X_t\rangle}\big) = -\ln \mathbb{P}_x\big(\mathrm{e}^{-\langle f, X_t\rangle}\big), \tag{4.8}$$

事实上, (4.8) 是 $X$ 的轨道过程的 Lévy-Khinchine 公式, 而 $\mathbb{N}_x$ 扮演着 Lévy 测度的角色.

### 4.2 上临界超扩散的 $L\log L$ 条件

Liu, Ren 和 Song[40−41] 讨论了上临界超过程的增长速度问题, 应用脊柱方法讨论了上临界超过程对应的鞅 $\{M_t(\phi)\}$ 极限的退化问题, 得到了在 $L\log L$ 矩有限的条件下, 鞅极限是一个 $L^1$ 极限. 关于超过程在鞅 $M_t(\phi)$ 的变换下的脊柱结构与分支 Markov 过程的脊柱结构相似, 在本节不再介绍. 我们会在下一节讨论超过程的脊柱结构, 并用此来研究波形解, 这里仅介绍刻画超过程的增长速度的结论. 定义

$$l(y) := \int_1^\infty r\phi(y)\log(r\phi(y))n(y, \mathrm{d}r). \tag{4.9}$$

**定理 4.1** 设 $X = \{X_t, t \geq 0; \mathbb{P}_\mu\}$ 是一个初值是 $\mu \in \mathcal{M}_F(D)$ 的 $(Y, \psi(\lambda))$- 超扩散, 其底过程 $Y$ 是满足假设 1 的扩散过程, 且 $\lambda_1 > 0$. 则 $M_\infty(\phi)$ 是 $L^1(\mathbb{P}_\mu)$ 极限的充要条件是积分 $\int_D \widetilde{\phi}(y)l(y)\mathrm{d}y$ 有限.

**定理 4.2** 设 $D$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的一个有界开集, $\{X_t, t \geq 0; \mathbb{P}_\mu\}$ 是 $D$ 上的一个超扩散过程, 满足假设 1, 且 $\lambda_1 > 0$, 则存在一个 $\Omega$ 的子集 $\Omega_0$ 满足: 对任意的 $\mu \in \mathcal{M}_F(D)$, $\mathbb{P}_\mu(\Omega_0) = 1$, 并且若 $f$

是 $D$ 上的任意有界 Borel 可测函数, 其不连续点组成的集合为 Lebesgue 零测集, 且存在 $c>0$ 使得 $f\le c\phi$, 则下面结论成立: 对任意的 $\omega\in\Omega_0$,

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\langle f,X_t\rangle(\omega)=M_\infty(\phi)(\omega)\int_D\widetilde{\phi}(y)f(y)\mathrm{d}y. \tag{4.10}$$

所以在上临界情形, 当 $\int_D\widetilde{\phi}(y)l(y)\mathrm{d}y<\infty$ 且超扩散不灭绝时, 超扩散会几乎处处地以指数速度 $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ 增长. 在临界或下临界时, 在不灭绝条件下的超过程的分布是原测度的鞅变换, 而鞅变换中用到的鞅也是 $M_t(\phi)$, 在 [18–20, 33, 38, 45, 49] 中都有相关内容的讨论.

## 5 脊柱分解在行波解适定性中的应用

### 5.1 分支布朗运动的 FKPP 方程的行波解

从上一部分的讨论可知, 脊柱方法的一个核心是在新测度下重新构造分支过程, 从而将随机多个轨道的性质的研究转化成一个轨道性质的研究. 这种方法首先出现在 [8] 中, 该文对分支布朗运动讨论了测度的鞅变换和脊柱分解: 设过程 $\{X_t\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个分支布朗运动, 分支率为一个常数 $\beta>0$, 平均后代个数是一个常数 $m>1$. 对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$, 定义过程

$$W_t(\lambda):=\sum_{\mathrm{u}\in L_t}\mathrm{e}^{-\beta(m-1)t}\mathrm{e}^{-\lambda Y_{\mathrm{u}}(t)-\frac{\lambda^2 t}{2}}=\sum_{\mathrm{u}\in L_t}\mathrm{e}^{-\lambda(Y_{\mathrm{u}}(t)+c_\lambda t)},$$

其中 $c_\lambda(t)=\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta(m-1)}{\lambda}$. 则 $\{W_t(\lambda)\}$ 是一个非负的鞅, 故几乎处处极限 $W_\infty(\lambda)=\lim_{t\to\infty}W_t(\lambda)$ 存在. 而且用此鞅可以定义测度的鞅变换: 对任意的 $t>0$, 定义 $\mathcal{F}_t=\sigma(X_s;s\le t)$,

$$\left.\frac{\mathrm{d}Q^x}{\mathrm{d}\mathbb{P}^x}\right|_{\mathcal{F}_t}=\frac{W_t(\lambda)}{W_0(\lambda)}\ .$$

Chauvin 和 Rouault[8] 讨论了二分支分支布朗运动在新测度下的脊柱分解结构, 而且利用这种结构讨论了分支布朗运动最右端粒子的大偏差问题和 Yaglom 类型的定理. 这里我们仅介绍在鞅 $\{W_t(\lambda)\}$ 变换下分支布朗运动的脊柱结构及该鞅在 FKPP 方程的行波解适定性判别中的应用.

半线性偏微分方程的行波解一直以来都受到人们的关注, 读者可参见 [53] 和其中的参考文献. [25 –28, 34] 等一些文章提出了 FKPP 方程行波解的概率解法. 在新测度 $Q^x$ 下, $\{X_t\}$ 的脊柱分解结构为:

(i) 脊柱从分支过程的初始位置出发, 按照漂移系数为 $-\lambda$ 的布朗运动进行扩散运动;

(ii) 脊柱独立于它的运动, 以参数为 $m\beta$ 的指数时间间隔产生后代;

(iii) 脊柱的后代个数服从的分布为有偏分布 $\{\hat{p}_k\}$;

(iv) 脊柱的每个粒子的下一代的选择, 是以相同的概率从它的后代中随机选取;

(v) 未被选中的粒子会从出生的地方, 设为 $y$, 出发, 以概率 $\mathbb{P}^y$ 独立地生成分支布朗运动.

应用类似于 GW 分支过程的鞅极限退化与否的判定方法, 可以得到下面关于 $W_\infty(\lambda)$ 的结论. 简记 $\mathbb{P}^0=\mathbb{P}$,

**定理 5.1** 令 $\underline{\lambda}=\sqrt{2\beta(m-1)}$, 则极限 $W_\infty(\lambda)$ 满足下面的性质:

(i) 若 $|\lambda|\ge\underline{\lambda}$, 则 $W_\infty(\lambda)=0$, $\mathbb{P}$-a.s.

(ii) 若 $|\lambda|<\underline{\lambda}$, 则 $W_\infty(\lambda)$ 是 $L^1(\mathbb{P})$ 极限当且仅当 $\sum_{k=2}^\infty k\ln k\,p_k<\infty$, 否则 $W_\infty(\lambda)=0$, $\mathbb{P}$-a.s.

当 $W_\infty(\lambda)$ 非退化时, 该极限的一个泛函是相应 FKPP 方程的行波解. 分支布朗运动的 FKPP 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta(f(u)-u), \tag{5.1}$$

其中 $f(u)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k u^k$, $u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\to[0,1]$. 一个行波解是指一个二次连续可微的单调递增函数 $\Phi_c:\mathbb{R}\to[0,1]$, 满足 $\Phi_c(-\infty)=0=1-\Phi_c(\infty)$, 而且 $u(x,t)=\Phi_c(x-ct)$ 是方程 (5.1) 的解, $c\in\mathbb{R}$ 称为行波速度. 则 FKPP 方程的行波解的适定性质为:

**(1) 下临界情形** 当 $|c|<\underline{c}:=\sqrt{2\beta(m-1)}=\underline{\lambda}$ 时, 行波解不存在;

**(2) 上临界情形** 当 $|c|>\underline{c}$ 且 $\sum_{k=2}^{\infty}k\ln k\,p_k<\infty$ 时, 对任意给定的波速 $c$, 有唯一的行波解

$$\Phi_{c_\lambda}(x)=\mathbb{P}\big(\exp\{-\mathrm{e}^{-\lambda x}W_\infty(\lambda)\}\big),$$

其中 $|\lambda|\in[0,\underline{\lambda})$ 使得 $c=c_\lambda$. 而且该唯一的行波解有下面渐近速度: 当 $x$ 趋于正无穷时,

$$1-\Phi_{c_\lambda}(x)\sim \mathrm{const}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda x},\quad \lambda>0.$$

对于临界情形, 即 $|c|=\underline{c}$ 的情况, 下面引入导数鞅. 若把 $W_t(\lambda)$ 看成是 $\lambda$ 的函数, 对 $\lambda$ 求导, 则可以得到另一个鞅

$$\partial W_t(\lambda)=-\frac{\partial}{\partial\lambda}W_t(\lambda)=\sum_{\mathrm{u}\in L_t}(Y_{\mathrm{u}}(t)+\lambda t)\,\mathrm{e}^{-\lambda(Y_{\mathrm{u}}(t)+c_\lambda t)},$$

我们称这个鞅为导数鞅, 这个导数鞅不是非负的. 下面考虑一个与此相关的非负鞅, 为此定义时空界

$$\Gamma^{(-x,\lambda)}:=\big\{(y,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+:\,y+\lambda t=-x\big\}.$$

对任意的时刻 $t>0$, 定义一个 $L_t$ 的子集 $\widetilde{L}_t$, 这个集合由所有在时刻 $t$ 存活且没有祖先的轨迹在时刻 $t$ 之前跨过 $\Gamma^{(-x,\lambda)}$ 的粒子组成. 进而定义过程

$$V_t^x(\lambda)=\sum_{\mathrm{u}\in\widetilde{L}_t}\frac{x+Y_{\mathrm{u}}(t)+\lambda t}{x}\mathrm{e}^{-\lambda(Y_{\mathrm{u}}(t)+c_\lambda t)}.$$

则该过程 $\{V_t^x(\lambda)\}$ 是一个非负鞅, 故而有几乎处处极限, 记为 $V_\infty^x(\lambda)$. 而且关于该鞅可以得到测度 $\mathbb{P}^x$ 的鞅变换概率测度 $Q^x$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}Q^x}{\mathrm{d}\mathbb{P}^x}\right|_{\mathcal{F}_t}=V_t^x(\lambda).$$

在新测度下, 分支布朗运动有下面的脊柱分解结构:

(i) 脊柱的运动轨迹 $Y$ 满足: $\{x+Y_t+\lambda t;t\geq 0\}$ 是一个从 $x$ 出发, $(0,\infty)$ 上的 Bessel-3 过程;

(ii) 脊柱的分支点是一个强度为 $m\beta$ 的 Poisson 过程;

(iii) 在脊柱发生分支时, 后代个数的分布为有偏分布

$$\hat{p}_k=\frac{k}{m}p_k,\quad k\geq 0;$$

(iv) 脊柱中每个粒子的下一代从这个粒子的后代中以相同的概率随机选取;

(v) 未被选中的粒子会从出生的地方出发, 不妨设为 $y$, 以概率 $\mathbb{P}^y$ 独立地生成分支布朗运动进行演变.

以这个脊柱分解结构为基础, Yang 和 Ren[55] 用与前面类似的讨论方法, 得到关于 $V^x_\infty(\lambda)$ 的下面结论:

**定理 5.2** 对于 $x>0$, $\{V^x_t(\lambda)\}$ 的几乎处处极限 $V^x_\infty(\lambda)$ 满足下面性质:

(i) 若 $\lambda>\underline{\lambda}$, 则 $V^x_\infty(\lambda)=0$, $\mathbb{P}$-a.s.

(ii) 若 $\lambda=\underline{\lambda}$, $V^x_\infty(\lambda)$ 是 $L^1(\mathbb{P})$ 极限的充要条件是 $\sum_{k=2}^\infty k(\ln k)^2 p_k<\infty$;

(iii) 若 $\lambda\in[0,\underline{\lambda})$, 则 $V^x_\infty(\lambda)=0$, $\mathbb{P}$-a.s. 的充要条件是 $\sum_{k=2}^\infty k\ln k\,p_k=\infty$; 或者 $V^x_\infty(\lambda)$ 是 $L^1(\mathbb{P})$ 极限的充要条件是 $\sum_{k=2}^\infty k\ln k\,p_k<\infty$.

Kyprianou[34] 证明了当 $|\lambda|\ge\underline{\lambda}$ 时, $\partial W_t(\lambda)$ 和 $V^x_t(\lambda)$ 基本相等这个事实; 从而在这个事实的基础上, 通过对鞅 $\{V^x_t(\lambda)\}$ 的讨论得到了下面关于导数鞅的极限性质.

**定理 5.3** 对于 $|\lambda|\ge\underline{\lambda}$, $\mathbb{P}$ 的几乎处处极限 $\partial W(\lambda)=\lim_{t\to\infty}\partial W_t(\lambda)$ 存在. 而且,

(i) 当 $|\lambda|>\underline{\lambda}$ 时, $\partial W(\lambda)$ 几乎处处等于 0;

(ii) 当 $|\lambda|=\underline{\lambda}$ 时, $\mathbb{P}\left(\partial W(\lambda)=0\right)=q$ 的充要条件是 $\sum_{k=2}^\infty k(\ln k)^2 p_k<\infty$, 其中 $q$ 为灭绝概率.

于是, 对于方程 (5.1) 在 $|c|=\underline{c}$ 时的行波解有下面概率表示:

**(3) 临界情形** 当 $|c|=\underline{c}$ 且 $\sum_{k=2}^\infty k(\ln k)^2 p_k<\infty$ 时, FKPP 方程 (5.1) 有唯一的以 $\underline{c}$ 为波速的行波解

$$\Phi_{\underline{c}}(x)=\mathbb{P}\big(\exp\{-\mathrm{e}^{-\underline{\lambda}x}\partial W(\lambda)\}t\big),$$

并且, 当 $x$ 趋于无穷时, 这个唯一的行波解有下面渐近速度:

$$1-\Phi_{\underline{c}}(x)\sim\mathrm{const}\cdot x\mathrm{e}^{-\underline{\lambda}x}.$$

### 5.2 超布朗运动的 FKPP 方程的行波解

最后我们来介绍如何用概率的方法讨论超布朗运动对应的 FKPP 方程行波解的适定性以及概率表示, 这部分内容可参见 [35] 以及其中的参考文献. 与上一节处理分支布朗运动的行波解的思想类似, 解决该问题的工具仍然是鞅的极限.

设 $X=(X_t,t\ge0;\mathbb{P}_\mu)$, $\mu\in\mathcal{M}_F(\mathbb{R})$, 是一个超布朗运动, 它的分支机制 $\psi$ 有下面的形式: 对任意的 $\lambda\ge0$,

$$\psi(\lambda)=\alpha\lambda+\beta\lambda^2+\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-\lambda r}-1+\lambda r)n(\mathrm{d}r),\tag{5.2}$$

其中 $\alpha,\beta$ 是常数, 且 $\alpha<0$, $\beta\ge0$, $n$ 是 $(0,\infty)$ 上一个 $\sigma$- 有限测度, 且 $\int_0^\infty(r\wedge r^2)n(\mathrm{d}r)<\infty$. 假设 $\psi(\infty)=\infty$, 称满足这些条件的过程 $X$ 为 $\psi$- 超布朗运动. 由于 $\psi$ 是严格凸的, $\psi(0)=0$, 且 $\alpha<0$, 故 $\psi$ 在 $(0,\infty)$ 中有唯一的根, 记为 $\lambda^*$. 故而 $\lim_{t\to\infty}X_t(1)=0$ 以正概率发生, 记 $\mathcal{E}:=\{\lim_{t\to\infty}X_t(1)=0\}$, 则

$$\mathbb{P}_\mu(\mathcal{E})=\exp\{-\lambda^*\mu(1)\}.\tag{5.3}$$

与超布朗运动相关的 FKPP 方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}u_t(x)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_t(x)-\psi(u_t(x)).\tag{5.4}$$

记该 FKPP 方程 (5.4) 的单调行波解为 $\Phi_c(x-ct)$, 则 $\Phi_c\in C^2(\mathbb{R})$, $\Phi_c(-\infty)=\lambda^*$, $\Phi_c(+\infty)=0$, 而且在 $\mathbb{R}$ 上是非负单调递减的. 故而 $\Phi_c$ 满足常微分方程

$$\frac{1}{2}\Phi_c''+c\Phi_c'-\psi(\Phi_c)=0. \tag{5.5}$$

注意: 对任意 $x\in\mathbb{R}^d$, $\mathbb{P}_{\delta_x}$ 被简记为 $\mathbb{P}_x$. 设 $\lambda\in\mathbb{R}$, 定义过程 $W(\lambda)=\{W_t(\lambda);t\geq 0\}$, 则这个过程是一个关于自然 $\sigma$ 域流 $(\mathcal{F}_t)$ 的 $\mathbb{P}_x$- 鞅, 其中

$$W_t(\lambda):=\mathrm{e}^{-\lambda c_\lambda t}\langle \mathrm{e}^{-\lambda\cdot},X_t\rangle,\quad t\geq 0. \tag{5.6}$$

由于该鞅是一个非负鞅, 所以有几乎处处极限, 记为 $W_\infty(\lambda)$. 对任意的 $\lambda,x\in\mathbb{R}$, 定义测度的鞅变换

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_x^{-\lambda}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_x}\right|_{\mathcal{F}_t}=\frac{W_t(\lambda)}{W_0(\lambda)},\quad t\geq 0.$$

则在新测度后 $\mathbb{P}_x^{-\lambda}$ 下, $X$ 可分解成两个独立部分的和: 第一部分同分布于原来的超过程, 第二部分是一个移民过程, 这个移民过程是沿着一个脊柱粒子或称为是永生粒子的 Poisson 点过程. 具体地说, $(X_t,\mathbb{P}_x^{-\lambda})$ 的脊柱结构可以构造如下:

**(i) (脊柱)** 脊柱过程 $Y=(Y_t,\Pi_x^{-\lambda})$ 是一个从 $x$ 出发的漂移系数为 $-\lambda\in\mathbb{R}$ 的布朗运动.

**(ii) (连续性移民)** 给定脊柱 $Y$, n 是一个 Poisson 点过程, n 沿时空位置 $(t,Y_t)$, 以强度 $2\beta\mathrm{d}t\times\mathrm{d}\mathbb{N}_{Y_t}$ 产生出测度值过程 $X^{\mathrm{n},t}:=\{X_s^{\mathrm{n},t};s\geq t\}$, 其中 $\mathbb{N}_x$ 是 $\psi$- 超布朗运动 $(X_t,\mathbb{P}_x)$ 的 Dynkin-Kuznetsov $\mathbb{N}$- 测度.

**(iii) (跳移民)** 给定脊柱 $Y$, m 是一个独立于 n 的 Poisson 点过程, m 沿时空位置 $(t,Y_t)$, 独立于 n, 以强度 $\mathrm{d}t\times rn(\mathrm{d}r)\times\mathrm{d}\mathbb{P}_{r\delta_{Y_t}}$ 产生出初始质量为 $r$ 的测度值过程 $X^{\mathrm{m},t}=\{X_s^{\mathrm{m},t};s\geq t\}$. 则对任意的 $t\geq 0$, $(X_t,\mathbb{P}_x^{-\lambda})$ 有下面的分解:

$$X_t=X_t'+X_t^{(\mathrm{n})}+X_t^{(\mathrm{m})}, \tag{5.7}$$

其中等式右端三个过程相互独立, $\{X_t';t\geq 0\}$ 同分布于 $(X_t,\mathbb{P}_x)$,

$$X_t^{(\mathrm{n})}=\sum_{s\leq t:\mathrm{n}}X_t^{\mathrm{n},s},\quad X_t^{(\mathrm{m})}=\sum_{s\leq t:\mathrm{m}}X_t^{\mathrm{m},s},\quad t\geq 0.$$

其中 $X^{(\mathrm{n})}$ 和 $X^{(\mathrm{m})}$ 的初始值都是 0, 而 $X'$ 的初始值为 $X_0'=\delta_x$.

超过程的这种脊柱结构可以从分布意义上得到, 可以证明过程 $(X_t,t\geq 0)$ 在测度 $\mathbb{P}_x^{-\lambda}$ 下仍然是马氏过程, 其转移概率的 Laplace 泛函可以表示成下面的形式:

**定理 5.4** 设 $\lambda\in\mathbb{R}$, $g\in C_b^+(\mathbb{R})$, 则

$$\mathbb{P}_x^{-\lambda}\big[\mathrm{e}^{-\langle g,X_t\rangle}\big]=\mathbb{P}_x\big[\mathrm{e}^{-\langle g,X_t\rangle}\big]\Pi_x^{-\lambda}\left[\exp\left\{-\int_0^t\phi(u_g(s,Y_{t-s}))\mathrm{d}s\right\}\right], \tag{5.8}$$

其中 $\phi(\lambda)=\psi'(\lambda)-\psi'(0+)=2\beta\lambda+\int_0^\infty(1-\mathrm{e}^{-\lambda r})rn(\mathrm{d}r)$, $\lambda\geq 0$, $u_g$ 是初值函数为 $g$ 的 $X$ 的 log-Laplace 方程 (5.4) 的解.

从该鞅也可以得到一个导数鞅. 对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$, 过程 $\partial W(\lambda)=\{\partial W_t(\lambda);t\geq 0\}$ 是一个关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的 $\mathbb{P}_x$- 鞅, 其中

$$\partial W_t(\lambda):=-\frac{\partial}{\partial\lambda}W_t(\lambda)=\langle(\lambda t+\cdot)\mathrm{e}^{-\lambda(c_\lambda t+\cdot)},X_t\rangle,\quad t\geq 0. \tag{5.9}$$

进而关于这两个鞅的极限性质, 有下面的结论:

**定理 5.5** 设 $\int^\infty \frac{1}{\sqrt{\psi(\lambda)}}\mathrm{d}\lambda < \infty$, 则下面结论成立.

(i) $W_\infty(\lambda)$ 是鞅 $W_t(\lambda)$ 的 $L^1(\mathbb{P}_x)$ 极限的充要条件是 $|\lambda| < \underline{\lambda}$ 而且 $\int_1^\infty r(\ln r)n(\mathrm{d}r) < \infty$. 此时, $\{W_\infty(\lambda) > 0\} = \mathcal{E}$, $\mathbb{P}_x$-a.s.

(ii) 当 $|\lambda| \geq \underline{\lambda}$ 时, $\partial W(\lambda)$ 有一个非负的几乎处处极限 $\partial W_\infty(\lambda)$. 若 $|\lambda| = \underline{\lambda}$ 且

$$\int_1^\infty r(\ln r)^2 n(\mathrm{d}r) < \infty,$$

则 $\{\partial W_\infty(\lambda) > 0\} = \mathcal{E}^c$; 否则 $\partial W_\infty(\lambda) = 0$, $\mathbb{P}_x$-a.s.

该定理的第一个结论的证明仍然是用之前在分支过程中证明非负鞅极限退化与否所用到的方法, 前面已介绍的在鞅 $W_t(\lambda)$ 的变换下超布朗运动的脊柱结构, 用类似的步骤可以证明 (i), 具体的讨论不再介绍, 详细证明见 [35]. 第二个结论的证明和分支布朗运动的导数鞅的极限的证明类似: 构造一个与导数鞅的极限一致的非负鞅 $\{V_t^{-y}(\lambda)\}$, 通过脊柱方法得到非负鞅 $\{V_t^{-y}(\lambda)\}$ 极限的非退化条件, 进而得到导数鞅极限的存在性和非退化条件. 下面我们来介绍证明 (ii) 的主要步骤.

设 $X^c$ 是一个底过程是漂移系数为 $c$ 的布朗运动, 分支机制是 $\psi$ 的超过程. 考虑区域 $D_{-y}^t = \{(s,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}; s < t, -z < y\}$, $t, y > 0$. 记 $X^c$ 首出 $D_{-y}^t$ 的测度为 $X^c_{D_{-y}^t}$. 记 $b_\lambda = c_\lambda - \lambda = -\frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\lambda}{2}$, $\lambda > 0$, 和 $\underline{\lambda} = \sqrt{-2\alpha}$. 定义一个非负鞅

$$V_t^{-y}(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda b_\lambda t} y^{-1} \langle (y + \cdot)\mathrm{e}^{-\lambda\,\cdot}, X^\lambda_{D_{-y}^t} \rangle, \quad t \geq 0, \tag{5.10}$$

从而该鞅有几乎处处极限, 记为 $V_\infty^{-y}(\lambda)$. 简记 $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0 = \mathbb{P}_{\delta_0}$, 定义 $\mathbb{P}$ 关于该鞅的鞅变换 $\mathbb{P}^{-y}$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^{-y}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = V_t^{-y}(\underline{\lambda}), \quad t \geq 0. \tag{5.11}$$

则 $(X_t, \mathbb{P}^{-y})$ 的脊柱结构如下:

**(i) (脊柱)** 脊柱过程 $Y = (Y_t, \widehat{\Pi}^{-y})$ 满足 $(y + Y_t + \underline{\lambda} t, \mathbb{P}^{-y})$ 是从 $y$ 出发的 Bessel-3 过程.

**(ii) (连续性移民)** 给定脊柱 $Y$, $\mathrm{n}$ 是一个 Poisson 点过程, $\mathrm{n}$ 沿时空位置 $(t, Y_t)$, 以强度 $2\beta \mathrm{d}t \times \mathrm{d}\mathbb{N}_{Y_t}$ 产生出测度值过程 $X^{\mathrm{n},t} := \{X_s^{\mathrm{n},t}; s \geq t\}$.

**(iii) (跳移民)** 给定脊柱 $Y$, $\mathrm{m}$ 是一个独立于 $\mathrm{n}$ 的 Poisson 点过程, $\mathrm{m}$ 沿时空位置 $(t, Y_t)$, 独立于 $\mathrm{n}$, 以强度 $\mathrm{d}t \times rn(\mathrm{d}r) \times \mathrm{d}\mathbb{P}_{r\delta_{Y_t}}$ 产生出初始质量为 $r$ 的测度值过程 $X^{\mathrm{m},t} = \{X_s^{\mathrm{m},t}; s \geq t\}$.

于是可以用脊柱方法对于非负鞅 $\{V^{-y}\}$ 的收敛性质得到下面的结论.

**定理 5.6** 固定 $y > 0$, 则

(i) 若 $\lambda > \underline{\lambda}$, 则 $V_\infty^{-y}(\lambda) = 0$, $\mathbb{P}$-a.s.

(ii) 若 $\lambda = \underline{\lambda}$, 则 $V_t^{-y}(\lambda)$ 在 $L^1(\mathbb{P})$ 意义下收敛到 $V_\infty^{-y}(\lambda)$ 当且仅当 $\int_1^\infty r(\ln r)^2 n(\mathrm{d}r) < \infty$; 否则 $V_\infty^{-y}(\lambda) = 0$, $\mathbb{P}$-a.s.

(iii) 若 $\lambda \in (0, \underline{\lambda})$, 则 $V_t^{-y}(\lambda)$ 在 $L^1(\mathbb{P})$ 意义下收敛到 $V_\infty^{-y}(\lambda)$ 当且仅当 $\int_1^\infty r(\ln r)n(\mathrm{d}r) < \infty$; 否则 $V_\infty^{-y}(\lambda) = 0$, $\mathbb{P}$-a.s.

从而由布朗运动的性质可以得到当 $|\lambda| \geq \underline{\lambda}$ 时, $V_t^{-y}(\lambda)$ 与 $\partial W_t(\lambda)$ 相差的部分在时间 $t$ 充分大时可以忽略. 于是就得到了定理 5.5 的结论 (ii). 利用这两类鞅的极限可以得到 FKPP 方程 (5.4) 的行波解的概率表示和适定性结论.

**定理 5.7** 设 $\int^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\psi(\lambda)}}\mathrm{d}\lambda<\infty$, 则下面结论成立:

(i) 设 $\int_1^{\infty} r(\ln r)n(\mathrm{d}r)<\infty$, 且 $\lambda\in(0,\underline{\lambda})$. 则方程 (34) 的行波解 $\Phi_{c_\lambda}$ 有下面的形式 (忽略一个可加的常数):

$$\Phi_{c_\lambda}(x)=-\ln\mathbb{P}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda x}W_\infty(\lambda)}\big]. \tag{5.12}$$

且当 $x$ 趋于正无穷时, $\Phi_{c_\lambda}(x)\sim\mathrm{const}\cdot\mathrm{e}^{-|\lambda|x}$.

(ii) 设 $\int_1^{\infty} r(\ln r)^2n(\mathrm{d}r)<\infty$, 且 $\lambda=\underline{\lambda}$, 则方程 (34) 的行波解 $\Phi_{c_\lambda}$ 有下面的形式:

$$\Phi_{c_\lambda}(x)=-\ln\mathbb{P}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda x}\partial W_\infty(\lambda)}\big]. \tag{5.13}$$

此时, 当 $x$ 趋于正无穷时, $\Phi_{c_\lambda}(x)\sim\mathrm{const}\cdot x\mathrm{e}^{-\lambda x}$.

除了上面单物种 FKPP 方程行波解的讨论外, Ren 和 Yang[47] 讨论了多物种分支布朗运动对应的方程组的行波解问题的概率解释. 现在已经有很多文章来讨论分支随机游动中类似于 (5.6) 或 (5.9) 中鞅的性质, 并且用这些性质来解决不同的问题, 如 [1–2, 43] 等.

## 参考文献


[1] Aïdékon, E., Convergence in law of the minimum of a branching random walk, *Ann. Probab.*, 2013, 41(3A): 1362-1426.

[2] Aïdékon, E. and Shi, Z., The Seneta-Heyde scaling for the branching random walk, 2011, arXiv: 1102.0217v3.

[3] Aldous, D., The continuum random tree. I, *Ann. Probab.*, 1991, 19(1): 1-28.

[4] Aldous, D., The continuum random tree III, *Ann. Probab.*, 1993, 21(1): 248-289.

[5] Asmussen, S. and Hering, H., Strong limit theorems for general supercritical branching processes with applications to branching diffusions, *Z. Wah. verw. Gebiete*, 1976, 36(3): 195-212.

[6] Athreya, K.B. and Ney, P.E., Branching Processes, Berlin: Springer-Verlag, 1972.

[7] Biggins, J.D. and Kyprianou, A.E., Measure change in multitype branching, *Adv. Appl. Probab.*, 2004, 36(2): 544-581.

[8] Chauvin, B. and Rouault, A., KPP equation and supercritical branching Brownian motion in the subcritical speed area. Application to spatial trees, *Probab. Theory Relat. Fields*, 1988, 80(2): 299-314.

[9] Dawson, D.A., Stochastic evolution equations and related measure processes, *J. Multivariate Anal.*, 1975, 5(1): 1-52.

[10] Dawson, D.A., Measure-valued Markov processes, In: Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXI - 1991 (Hennequin, P.-L. ed.), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1541, Berlin: Springer-Verlag, 1993: 1-260.

[11] Duquesne, T. and Le Gall, J.-F., Random Trees, Lévy Processes and Spatial Branching Processes, Astérisque, Vol. 281, Paris: Société mathématique de France, 2002.

[12] Durrett, R., Probability Theory and Examples (Third edition), Belmont: Duxbury Press, 1996.

[13] Dynkin, E.B., Branching particle systems and superprocesses, *Ann. Probab.*, 1991, 19(3): 1157-1194.

[14] Dynkin, E.B., Superprocesses and partial differential equations, *Ann. Probab.*, 1993, 21(3): 1185-1262.

[15] Dynkin, E.B. and Kuznetsov, S.E., $\mathbb{N}$-measures for branching Markov exit systems and their applications to differential equations, *Probab. Theory Relat. Fields*, 2004, 130(1): 135-150.

[16] Engländer, J., Harris, S.C. and Kyprianou, A.E., Strong law of large numbers for branching diffusions, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 2010, 46(1): 279-298.

[17] Engländer, J. and Kyprianou, A.E., Local extinction versus local exponential growth for spatial branching processes, *Ann. Probab.*, 2004, 32(1A): 78-99.

[18] Etheridge, A.M. and Williams, D.R.E., A decomposition of the $(1+\beta)$-superprocess conditioned on survival, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh: Sect. A Math.*, 2003, 133(4): 829-847.

[19] Evans, S.N., Two representations of a conditioned superprocess, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh: Sect. A Math.*, 1993, 123(5): 959-971.

[20] Evans, S.N. and Perkins, E., Measure-valued Markov branching processes conditioned on non-extinction, *Israel J. Math.*, 1990, 71(3): 329-337.

[21] Geiger, J., Size-biased and conditioned random splitting trees, *Stochastic process. Appl.*, 1996, 65(2): 187-207.

[22] Geiger, J., Elementary new proofs of classical limit theorems for Galton-Watson processes, *J. Appl. Probab.*, 1999, 36(2): 301-309.

[23] Georgii, H.O. and Baake, E., Supercritical multitype branching processes: the ancestral types of typical individuals, *Adv. Appl. Probab.*, 2003, 35(4): 1090-1110.

[24] Hardy, R. and Harris, S.C., A spine approach to branching diffusions with applications to $L^p$-convergence of martingales, In: Séminaire de Prbabilités XLII (Donati-Martin, C., Émery, M, Rouault, A. and Stricker, C. eds.), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1979, Berlin: Springer-Verlag, 2009: 281-330.

[25] Harris, J.W. and Harris, S.C., A new formulation of the spine approach to branching diffusions, 2006, arXiv: math/0611054.

[26] Harris, J.W. and Harris, S.C., Survival probabilities for branching Brownian motion with absorption, *Electron. Comm. Probab.*, 2007, 12: 81-92.

[27] Harris, J.W., Harris, S.C. and Kyprianou, A.E., Further probabilistic analysis of the Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piscounov equation: one sided travelling-waves, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 2006, 42(1): 125-145.

[28] Harris, S.C., Travelling-waves for the FKPP equation via probabilistic arguments, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh: Sect. A Math.*, 1999, 129(3): 503-517.

[29] Harris, S.C. and Roberts, M.I., Measure changes with extinction, *Statist. Probab. Lett.*, 2009, 79(8): 1129-1133.

[30] Harris, T.E., The Theory of Branching Processes, New York: Springer-Verlag, 1963.

[31] Ikeda, N., Nagasawa, M. and Watanabe, S., Branching Markov processes I, II, III, *J. Math. Kyoto Univ.*, 1968, 8(2): 233-278; 1968, 8(3): 365-410; 1969, 9(1): 95-160.

[32] Kesten, H. and Stigum, B.P., A limit theorem for multidimensional Galton-Watson process, *Ann. Math. Statist.*, 1966, 37(5): 1211-1223.

[33] Krone, S.M., Conditioned superprocesses and their weighted occupation times, *Statist. Probab. Lett.*, 1995, 22(1): 59-69.

[34] Kyprianou, A.E., Travelling wave solutions to the K-P-P equation: alternatives to Simon Harris' probabilistic analysis, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 2004, 40(1): 53-72.

[35] Kyprianou, A.E., Liu, R.L., Murillo-Salas, A. and Ren Y.X., Supercritical super-Brownian motion with a general branching mechanism and travelling waves, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 2012, 48(3): 661-687.

[36] Lambert, A., Quasi-stationary distributions and the continuous-state branching process conditioned to be never extinct, *Electron. J. Probab.*, 2007, 12(14): 420-466.

[37] Le Gall, J.-F., Random trees and applications, *Probab. Surv.*, 2005, 2: 245-311.

[38] Lee, T.Y., Conditional limit distributions of critical branching Brownian motions, *Ann. Probab.*, 1991, 19(1): 289-311.

[39] Li, Z., Measure-Valued Branching Markov Processes, Berlin: Springer-Verlag, 2011.

[40] Liu, R.L., Ren, Y.X. and Song, R., $L\log L$ condition for a class of superdiffusions, *J. Appl. Probab.*, 2009, 46(2): 479-496.

[41] Liu, R.L., Ren, Y.X. and Song, R., Strong law of Large numbers for a class of superdiffusions, *Acta. Appl. Math.*, 2013, 123(1): 73-97.

[42] Lyons, R., Pemantle, R. and Peres, Y., Conceptual proofs of $L\log L$ criteria for mean behavior of branching processes, *Ann. Probab.*, 1995, 23(3): 1125-1138.

[43] Maillard, P., The number of absorbed individuals in branching Brownian motion with a barrier, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 2013, 49(2): 428-455.

[44] Olofsson, P., The $x \log x$ condition for general branching processes, *J. Appl. Probab.*, 1998, 35(3): 537-544.

[45] Overbeck, L., Conditioned super-Brownian motion, *Probab. Theory Relat. Fields*, 1993, 96(4): 545-570.

[46] Perkins, E., Dawson-Watanabe superprocesses and measure-valued diffusions, In: Lectures on Probability Theory and Statitics, Ecole d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXIX - 1999 (Bernard, P. ed.), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1781, Springer-Verlag, 2002.

[47] Ren, Y.X. and Yang, T., Multitype branching Brownian motion and travelling waves, *J. Appl. Probab.*, 2014, in press.

[48] Roelly-Coppoletta, S. and Rouault, A., Processus de Dawson-Watanabe conditionné par le futur lointain, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris Sér. I*, 1989, 309: 867-872 (in French).

[49] Serlet, L., The occupation measure of super-Brownian motion conditioned to nonextinction, *J. Theoret. Probab.*, 1996, 9(3): 561-578.

[50] Stanley, R.P., Enumerative Combinatorics, Vol. 2, Cambridge: Cambridge University press, 1999.

[51] Steffensen, J.F., Om Sandsynligheden for at afkommet uddør, *Matematisk Tidsskrift*, 1930, B(1): 19-23 (in Danish).

[52] Steffensen, J.F., Deux problèmes du calcul des probabilités, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1932, 3(3): 319-344 (in French).

[53] Uchiyama, K., The behavior of solutions of some non-linear diffusion equations for large time, *J. Math. Kyoto Univ.*, 1978, 18(3): 453-508.

[54] Watanabe, S., A limit theorem of branching processes and continuous state branching processes, *J. Math. Kyoto Univ.*, 1968, 8(1): 141-167.

[55] Yang, T. and Ren, Y.X., Limit theorem for derivative martingale at criticality w.r.t. branching Brownian motion, *Probab. Statist. Lett.*, 2011, 81(2): 195-200.

# Spine Decomposition and Applications of Branching Processes and Related Models

LIU Rongli[1], REN Yanxia[2]

(*1. Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing, Jiangsu, 210093, P. R. China; 2. School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing, 100871, P. R. China*)

**Abstract:** Due to their close connections to both biology and other branches of mathematics, branching processes, branching Markov processes and superprocesses have been receiving more and more attention. Early studies of these processes are mainly based on analytical methods. In recent years, many people started to use probabilistic methods to study these processes. One of these probabilistic methods is the so-called spine method. The spine method mainly uses martingale transforms of measures and spine decomposition of the processes to reduce the study of a random number of sample paths of these processes to the study of one sample path. The spine method greatly simplifies the arguments, and makes the arguments more intuitive. In this paper, we give a survey of the spine method and its applications to the three types of processes above.

**Keywords:** branching process; martingale change; branching Markov process; superprocess; traveling wave solution