

第六章、统计学基本概念, 第七章、估计

- 第十三次课

 - §6.1 引言

 - §6.2 若干基本概念

 - §7.1 最大似然估计

- 第十四次课

 - §7.2 矩估计

 - §7.3 估计的无偏性

 - §7.4 无偏估计的优良性

- 第十五次课

 - §7.5 估计的相合性

 - §7.6 估计的渐近分布

 - §7.7 置信区间和置信限

§6.1 引言, §6.2 若干基本概念

- 概率vs 统计
理论vs 应用, 极限定理: LLN, CLT.

§6.1 引言, §6.2 若干基本概念

- 概率vs 统计
理论vs 应用, 极限定理: LLN, CLT.
- 数据(data), 收集、分析...; 思想、方法!

§6.1 引言, §6.2 若干基本概念

- 概率vs 统计
理论vs 应用, 极限定理: LLN, CLT.
- 数据(data), 收集、分析...; 思想、方法!
- 总体模型 $X \sim F_\theta, \theta \in \Theta$.

§6.1 引言, §6.2 若干基本概念

- 概率vs 统计
理论vs 应用, 极限定理: LLN, CLT.
- 数据(data), 收集、分析...; 思想、方法!
- 总体模型 $X \sim F_\theta, \theta \in \Theta$.
- 样本 $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$, 其中 $X_1, \dots, X_n \sim \text{i.i.d. } F_\theta$

§6.1 引言, §6.2 若干基本概念

- 概率vs 统计
理论vs 应用, 极限定理: LLN, CLT.
- 数据(data), 收集、分析...; 思想、方法!
- 总体模型 $X \sim F_\theta, \theta \in \Theta$.
- 样本 $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$, 其中 $X_1, \dots, X_n \sim \text{i.i.d. } F_\theta$
- 样本量 n ,
样本值 $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$,

§6.1 引言, §6.2 若干基本概念

- 概率vs 统计
理论vs 应用, 极限定理: LLN, CLT.
- 数据(data), 收集、分析...; 思想、方法!
- 总体模型 $X \sim F_\theta, \theta \in \Theta$.
- 样本 $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$, 其中 $X_1, \dots, X_n \sim \text{i.i.d. } F_\theta$
- 样本量 n ,
样本值 $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$,
- 研究对象: θ 或 $g(\theta)$.

例: 有 N 个产品, 其中 M 个次品. $N, M \gg 1$, 未知.

目标: 调查次品率 $p = \frac{M}{N}$.

方法: 任取 n 个.

例: 有 N 个产品, 其中 M 个次品. $N, M \gg 1$, 未知.

目标: 调查次品率 $p = \frac{M}{N}$.

方法: 任取 n 个.

- 总体 $\Omega_0 = \{1, \dots, M, M + 1, \dots, N\}$. 古典概型.

例: 有 N 个产品, 其中 M 个次品. $N, M \gg 1$, 未知.

目标: 调查次品率 $p = \frac{M}{N}$.

方法: 任取 n 个.

- 总体 $\Omega_0 = \{1, \dots, M, M + 1, \dots, N\}$. 古典概型.
- 根据目标, 对样本 i 赋值:

$$X(i) = 1, i \leq M; X(i) = 0, i \geq M + 1.$$

产生随机变量!

总体分布: $F_\theta =$ 两点分布, 参数 $\theta = p = \frac{M}{N}$. $\Theta = [0, 1]$.

例: 有 N 个产品, 其中 M 个次品. $N, M \gg 1$, 未知.

目标: 调查次品率 $p = \frac{M}{N}$.

方法: 任取 n 个.

- 总体 $\Omega_0 = \{1, \dots, M, M + 1, \dots, N\}$. 古典概型.

- 根据目标, 对样本 i 赋值:

$$X(i) = 1, i \leq M; X(i) = 0, i \geq M + 1.$$

产生随机变量!

总体分布: $F_\theta =$ 两点分布, 参数 $\theta = p = \frac{M}{N}$. $\Theta = [0, 1]$.

- 任取 n 个. 产生新模型:

$$\Omega = \{\omega = (i_1, \dots, i_n), i_1, \dots, i_n \in \Omega_0\}.$$

得到 n 个样本值: $X_1(\omega) = X(i_1), \dots, X_n(\omega) = X(i_n)$.

例: 有 N 个产品, 其中 M 个次品. $N, M \gg 1$, 未知.

目标: 调查次品率 $p = \frac{M}{N}$.

方法: 任取 n 个.

- 总体 $\Omega_0 = \{1, \dots, M, M + 1, \dots, N\}$. 古典概型.

- 根据目标, 对样本 i 赋值:

$$X(i) = 1, i \leq M; X(i) = 0, i \geq M + 1.$$

产生随机变量!

总体分布: $F_\theta =$ 两点分布, 参数 $\theta = p = \frac{M}{N}$. $\Theta = [0, 1]$.

- 任取 n 个. 产生新模型:

$$\Omega = \{\omega = (i_1, \dots, i_n), i_1, \dots, i_n \in \Omega_0\}.$$

得到 n 个样本值: $X_1(\omega) = X(i_1), \dots, X_n(\omega) = X(i_n)$.

- 近似地, X_1, \dots, X_n 是定义在 Ω 上的i.i.d随机变量, 都 $\sim F_\theta$.

- 统计量: 样本的函数 $T(\vec{X})$, 输入数据 \vec{x} 输出值 $T(\vec{x})$.

样本均值: $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \bar{X}$,

样本方差: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

- 统计量: 样本的函数 $T(\vec{X})$, 输入数据 \vec{x} 输出值 $T(\vec{x})$.

样本均值: $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \bar{X}$,

样本方差: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

- 样本值 \rightarrow 新模型: $P(\xi = x_i) = \frac{1}{n}, i = 1, \cdots, n$.

样本均值: $E\xi = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) = \bar{x}$.

样本方差: $\text{var}(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

- 统计量: 样本的函数 $T(\vec{X})$, 输入数据 \vec{x} 输出值 $T(\vec{x})$.

样本均值: $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \bar{X}$,

样本方差: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

- 样本值 \rightarrow 新模型: $P(\xi = x_i) = \frac{1}{n}, i = 1, \cdots, n$.

样本均值: $E\xi = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) = \bar{x}$.

样本方差: $\text{var}(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

- 正交分解 $E(\xi - a)^2 = \text{var}(\xi) + (a - \bar{x})^2$:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - a)^2.$$

- 统计量: 样本的函数 $T(\vec{X})$, 输入数据 \vec{x} 输出值 $T(\vec{x})$.

样本均值: $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \bar{X}$,

样本方差: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

- 样本值 \rightarrow 新模型: $P(\xi = x_i) = \frac{1}{n}, i = 1, \cdots, n$.

样本均值: $E\xi = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) = \bar{x}$.

样本方差: $\text{var}(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

- 正交分解 $E(\xi - a)^2 = \text{var}(\xi) + (a - \bar{x})^2$:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - a)^2.$$

- 两类主要问题:

参数估计: 给出 θ 的估计值 $\hat{\theta}$ 或区间 $[\underline{\theta}, \bar{\theta}]$.

假设检验: 对某假设回答“是”或“否”.

- 统计量: 样本的函数 $T(\vec{X})$, 输入数据 \vec{x} 输出值 $T(\vec{x})$.

样本均值: $\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \bar{X}$,

样本方差: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

- 样本值 \rightarrow 新模型: $P(\xi = x_i) = \frac{1}{n}, i = 1, \cdots, n$.

样本均值: $E\xi = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) = \bar{x}$.

样本方差: $\text{var}(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

- 正交分解 $E(\xi - a)^2 = \text{var}(\xi) + (a - \bar{x})^2$:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - a)^2.$$

- 两类主要问题:

参数估计: 给出 θ 的估计值 $\hat{\theta}$ 或区间 $[\theta, \bar{\theta}]$.

假设检验: 对某假设回答“是”或“否”.

- 其他: 回归、贝叶斯统计.

§7.1 最大似然估计

总体 $X \sim F_\theta$. 目标: 给出 θ 的估计值 $\hat{\theta}$.

思想: 大概率事件发生. **支撑:** 概率的主观置信度含义.

似然函数: 参数(与数据)的函数.

§7.1 最大似然估计

总体 $X \sim F_\theta$. 目标: 给出 θ 的估计值 $\hat{\theta}$.

思想: 大概率事件发生. **支撑:** 概率的主观置信度含义.

似然函数: 参数(与数据)的函数.

- 离散型:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n P_\theta(X_i = x_i) (= P_\theta(X_i = x_i, i = 1, \dots, n)).$$

§7.1 最大似然估计

总体 $X \sim F_\theta$. 目标: 给出 θ 的估计值 $\hat{\theta}$.

思想: 大概率事件发生. **支撑:** 概率的主观置信度含义.

似然函数: 参数(与数据)的函数.

- 离散型:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n P_\theta(X_i = x_i) (= P_\theta(X_i = x_i, i = 1, \dots, n)).$$

- 连续型: $L(\theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(x_i) (= p_{\theta, \vec{X}}(x_1, \dots, x_n)).$

§7.1 最大似然估计

总体 $X \sim F_\theta$. 目标: 给出 θ 的估计值 $\hat{\theta}$.

思想: 大概率事件发生. **支撑:** 概率的主观置信度含义.

似然函数: 参数(与数据)的函数.

- 离散型:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n P_\theta(X_i = x_i) (= P_\theta(X_i = x_i, i = 1, \dots, n)).$$

- 连续型: $L(\theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(x_i) (= p_{\theta, \vec{X}}(x_1, \dots, x_n)).$

- 定义1.1. θ 的最大似然估计指 $L(\theta)$ 的最大值点, 记为 $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n).$

§7.1 最大似然估计

总体 $X \sim F_\theta$. 目标: 给出 θ 的估计值 $\hat{\theta}$.

思想: 大概率事件发生. **支撑:** 概率的主观置信度含义.

似然函数: 参数(与数据)的函数.

- 离散型:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n P_\theta(X_i = x_i) (= P_\theta(X_i = x_i, i = 1, \dots, n)).$$

- 连续型: $L(\theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(x_i) (= p_{\theta, \vec{X}}(x_1, \dots, x_n)).$

- 定义1.1. θ 的最大似然估计指 $L(\theta)$ 的最大值点, 记为 $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n).$

- $L(\theta) = L(\theta, \vec{x})$, 当数据变化时, 似然函数会变.

§7.1 最大似然估计

总体 $X \sim F_\theta$. 目标: 给出 θ 的估计值 $\hat{\theta}$.

思想: 大概率事件发生. **支撑:** 概率的主观置信度含义.

似然函数: 参数(与数据)的函数.

- 离散型:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n P_\theta(X_i = x_i) (= P_\theta(X_i = x_i, i = 1, \dots, n)).$$

- 连续型: $L(\theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(x_i) (= p_{\theta, \vec{X}}(x_1, \dots, x_n)).$

- 定义1.1. θ 的最大似然估计指 $L(\theta)$ 的最大值点, 记为 $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$.

- $L(\theta) = L(\theta, \vec{x})$, 当数据变化时, 似然函数会变.

- 统计量: 理论 $\hat{\theta}(\vec{X})$ vs 应用 $\hat{\theta}(\vec{x})$.

习题一、11. 在未名湖中捕鱼80条, 标记后放回, 再捕鱼100条, 其中4条有标记. 猜湖中的总鱼数 N .

习题一、11. 在未名湖中捕鱼80条, 标记后放回, 再捕鱼100条, 其中4条有标记. 猜湖中的总鱼数 N .

- $n = 1$, $X_1 =$ 有标记的鱼数 \sim 超几何分布, $x_1 = 4$.

习题一、11. 在未名湖中捕鱼80条, 标记后放回, 再捕鱼100条, 其中4条有标记. 猜湖中的总鱼数 N .

• $n = 1$, $X_1 =$ 有标记的鱼数 \sim 超几何分布, $x_1 = 4$.

• $\theta = N$. $L(\theta, x_1) = P(X_1 = x_1) = \frac{C_{80}^{x_1} C_{N-80}^{100-x_1}}{C_N^{100}}$.

习题一、11. 在未名湖中捕鱼80条, 标记后放回, 再捕鱼100条, 其中4条有标记. 猜湖中的总鱼数 N .

• $n = 1$, $X_1 =$ 有标记的鱼数 \sim 超几何分布, $x_1 = 4$.

• $\theta = N$. $L(\theta, x_1) = P(X_1 = x_1) = \frac{C_{80}^{x_1} C_{N-80}^{100-x_1}}{C_N^{100}}$.

• $L(\theta, 4) = \frac{C_{80}^4 C_{N-80}^{96}}{C_N^{100}} =: p_N$.

习题一、11. 在未名湖中捕鱼80条, 标记后放回, 再捕鱼100条, 其中4条有标记. 猜湖中的总鱼数 N .

• $n = 1$, $X_1 =$ 有标记的鱼数 \sim 超几何分布, $x_1 = 4$.

• $\theta = N$. $L(\theta, x_1) = P(X_1 = x_1) = \frac{C_{80}^{x_1} C_{N-80}^{100-x_1}}{C_N^{100}}$.

• $L(\theta, 4) = \frac{C_{80}^4 C_{N-80}^{96}}{C_N^{100}} =: p_N$.

• p_N 的最大值点为 $\hat{N} = 1999$ 或 2000 (皆可).

例1.1. 测试飞机最大飞行速度, 得到 n 个数据: x_1, \dots, x_n . 试估计飞机的最大飞行速度的均值.

例1.1. 测试飞机最大飞行速度, 得到 n 个数据: x_1, \dots, x_n . 试估计飞机的最大飞行速度的均值.

- 假设飞机最大飞行速度 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$.
假设的合理性vs 不合理性.

例1.1. 测试飞机最大飞行速度, 得到 n 个数据: x_1, \dots, x_n . 试估计飞机的最大飞行速度的均值.

- 假设飞机最大飞行速度 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$.
假设的合理性vs 不合理性.
- 确定参数 $\theta = (\mu, \sigma^2)$. θ : 待估参数, σ^2 : 讨厌参数.
写出似然函数.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}.$$

例1.1. 测试飞机最大飞行速度, 得到 n 个数据: x_1, \dots, x_n . 试估计飞机的最大飞行速度的均值.

- 假设飞机最大飞行速度 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$.
假设的合理性vs 不合理性.
- 确定参数 $\theta = (\mu, \sigma^2)$. θ : 待估参数, σ^2 : 讨厌参数.
写出似然函数.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}.$$

- 求 $L(\theta)$ 的最大值点.

固定 σ^2 , 即求 $\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$ 的最小值点, 注意:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - \mu)^2.$$

$\hat{\mu} = \bar{x}$ (样本均值).

例1.1. 测试飞机最大飞行速度, 得到 n 个数据: x_1, \dots, x_n . 试估计飞机的最大飞行速度的均值.

- 假设飞机最大飞行速度 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$.

假设的合理性vs 不合理性.

- 确定参数 $\theta = (\mu, \sigma^2)$. θ : 待估参数, σ^2 : 讨厌参数.

写出似然函数.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}.$$

- 求 $L(\theta)$ 的最大值点.

固定 σ^2 , 即求 $\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$ 的最小值点, 注意:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - \mu)^2.$$

$\hat{\mu} = \bar{x}$ (样本均值).

- 一般情况, $\hat{\mu}$ 可能会依赖于讨厌参数 σ^2 , 还需求出 $\hat{\sigma}^2$ 再代入.

进一步, 还可求 $\tau = \sigma^2$ 的最大似然估计.

进一步, 还可求 $\tau = \sigma^2$ 的最大似然估计.

- 似然函数.

已知 $\hat{\mu} = \bar{x}$. 此时, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 =: a$,

$$L(\bar{x}, \sigma^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma^2)^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \tau^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{na}{2\tau}}.$$

进一步, 还可求 $\tau = \sigma^2$ 的最大似然估计.

- 似然函数.

已知 $\hat{\mu} = \bar{x}$. 此时, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 =: a$,

$$L(\bar{x}, \sigma^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \tau^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{na}{2\tau}}.$$

- 求 $L(\bar{x}, \tau)$ 即 $\log L(\bar{x}, \tau) = C - \frac{n}{2} \log \tau - \frac{na}{2\tau}$ 的最大值点.

$$\frac{d}{d\tau} \log L(\bar{x}, \tau) = -\frac{n}{2\tau} + \frac{na}{2\tau^2} = \frac{n}{2\tau^2} (a - \tau).$$

因此, $\hat{\tau} = a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ (样本方差).

习题七、9. 假设 X_1, \dots, X_n i.i.d. $\sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \geq 0$, $\sigma^2 = 1$.
求 μ 的最大似然估计.

习题七、9. 假设 X_1, \dots, X_n i.i.d. $\sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \geq 0$, $\sigma^2 = 1$.
求 μ 的最大似然估计.

- 确定参数 $\theta := \mu$, 及其范围 $\Theta = [0, \infty)$.

写出似然函数,

$$L(\mu) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}.$$

习题七、9. 假设 X_1, \dots, X_n i.i.d. $\sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \geq 0$, $\sigma^2 = 1$.
求 μ 的最大似然估计.

- 确定参数 $\theta := \mu$, 及其范围 $\Theta = [0, \infty)$.

写出似然函数,

$$L(\mu) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}.$$

- 求 $L(\theta)$ 的最大值点.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2.$$

习题七、9. 假设 X_1, \dots, X_n i.i.d. $\sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \geq 0$, $\sigma^2 = 1$.
求 μ 的最大似然估计.

- 确定参数 $\theta := \mu$, 及其范围 $\Theta = [0, \infty)$.

写出似然函数,

$$L(\mu) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}.$$

- 求 $L(\theta)$ 的最大值点.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2.$$

- **注意参数范围!**

若 $\bar{x} \in \Theta$ (即 $\bar{x} \geq 0$), 则 $\hat{\mu} = \bar{x}$.

否则, $\bar{x} < 0$, 在 $\mu \in \Theta$ 中取 $(\bar{x} - \mu)^2$ 的最小值点, 即 $\hat{\mu} = 0$.

例1.5. 假设 X_1, \dots, X_n i.i.d. $\sim \text{Exp}(\lambda)$. 求 λ 的最大似然估计.

例1.5. 假设 X_1, \dots, X_n i.i.d. $\sim \text{Exp}(\lambda)$. 求 λ 的最大似然估计.

- $L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda n \bar{x}}.$

例1.5. 假设 X_1, \dots, X_n i.i.d. $\sim \text{Exp}(\lambda)$. 求 λ 的最大似然估计.

- $L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda n \bar{x}}$.
- 求 $\log L(\lambda) = n \log \lambda - n \lambda \bar{x}$ 的最大值点.
 $\frac{d}{d\lambda} \log L(\lambda) = n(\frac{1}{\lambda} - \bar{x})$

例1.5. 假设 X_1, \dots, X_n i.i.d. $\sim \text{Exp}(\lambda)$. 求 λ 的最大似然估计.

- $L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda n \bar{x}}$.
- 求 $\log L(\lambda) = n \log \lambda - n \lambda \bar{x}$ 的最大值点.
 $\frac{d}{d\lambda} \log L(\lambda) = n(\frac{1}{\lambda} - \bar{x})$
- $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$ 为 λ 的最大似然估计.

例1.5. 假设 X_1, \dots, X_n i.i.d. $\sim \text{Exp}(\lambda)$. 求 λ 的最大似然估计.

- $L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda n \bar{x}}$.
- 求 $\log L(\lambda) = n \log \lambda - n \lambda \bar{x}$ 的最大值点.
 $\frac{d}{d\lambda} \log L(\lambda) = n(\frac{1}{\lambda} - \bar{x})$
- $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$ 为 λ 的最大似然估计.
- $\hat{\lambda}(\vec{X}) = \frac{1}{\bar{X}}$ 为 λ 的最大似然估计量.

例1.5. 假设 X_1, \dots, X_n i.i.d. $\sim \text{Exp}(\lambda)$. 求 λ 的最大似然估计.

- $L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda n \bar{x}}$.
- 求 $\log L(\lambda) = n \log \lambda - n \lambda \bar{x}$ 的最大值点.
 $\frac{d}{d\lambda} \log L(\lambda) = n(\frac{1}{\lambda} - \bar{x})$
- $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$ 为 λ 的最大似然估计.
- $\hat{\lambda}(\vec{X}) = \frac{1}{\bar{X}}$ 为 λ 的最大似然估计量.
- 注: 有时用 $\theta := \frac{1}{\lambda}$ 做参数, $p_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} 1_{x \geq 0}$, $EX = \theta$.