习题二部分解答

2.33(3) 方法1：根据题意赌徒有无穷多赌本, 令B_i=“庄家有k千元且最后输光”，$q(k) = P(B_k)$, 要求$q(1000) =?$

令A =“庄家第一局赢”， $p := P(A) = 0.501, q := 1 - P(A) = 0.499.$

根据全概率公式：

$$q(k) = pq(k+1) + qq(k-1).$$

整理得

$$p(q(k+1) - q(k)) = q(q(k) - q(k-1)).$$

解得：

$$q(k) = q(0) + (q(1) - q(0))\frac{1-(q/p)^k}{1-q/p}.$$

又知$q(0) = 1, q(\infty) = 0$， 所以

$$q(k) = (q/p)^k,$$

从而

$$q(1000) = (0.499/0.501)^{1000}.$$

方法2： $q_b(k)$表示赌徒赌本为b千元且最后输光的概率。

令A =“庄家第一局赢”， $p := P(A) = 0.501, q := 1 - P(A) = 0.499.$

根据全概率公式：

$$q_b(k) = pq_b(k+1) + qq_b(k-1).$$

整理得

$$p(q_b(k+1) - q(k)) = q(q_b(k) - q_b(k-1)).$$

解得：

$$q_b(k) = q(0) + (q(1) - q(0))\frac{1-(q/p)^k}{1-q/p}.$$

因为$q(0) = 1, q(1000 + b) = 0$, 所以

$$q_b(k) = \frac{(q/p)^k - (q/p)^{1000+b}}{1-(q/p)^{1000+b}}.$$

令$b \to \infty$得

$$\lim_{b\to\infty} q_b(k) = (q/p)^k.$$

这里需要说明$\lim_{b\to\infty} q_b(k)$就是赌徒有无穷赌本且庄家有k元赌本时庄家破产的概率（ 这一点在学习了随机游动模型后就容易理解和解释，所以建议下学期选“应用随机过程”或者”随机过程引论”， 严格说明见下面补充）. 从而所求概率为

$$(0.499/0.501)^{1000}.$$

补充： 假设$X_n(\omega)$表示赌庄第n局后的资本，$X_0(\omega) = 1000$. $\{X_n, n \geq 1\}$是随机游动. 令

$$\tau_0(\omega) := \inf\{n | X_n(\omega) = b\};$$

$$\tau_b(\omega) := \inf\{n | X_n(\omega) \geq b\}, \quad b = 1001, 1002 \cdots$$

$$A_b = \{\omega | \tau_b(\omega) < \infty\} = \{\omega | \exists n, s.t. X_n(\omega) \geq b\}$$

$$B_b = \{\omega | \forall n, 0 < X_n(\omega) < b\}.$$

$$B_b^c = (\tau_0 < \tau_b) \cap (\tau_0 > \tau_b).$$

根据2.32, $P(\tau_0 < \tau_b) + P(\tau_0 > \tau_b) = 1$, 从而对 $b \geq 1001, 1002, \cdots$, $P(B_b) = 0$, 所以

$$q(1000) = 1 - P(\bigcap_{b=1001}^{\infty} (A_b \cup B_b)) = \lim_{b \to \infty} (1 - P(A_b)) = \lim_{b \to \infty} q_b(1000) = (q/p)^{1000}.$$