习题一部分解答

1.31 令C_i=“抽到第i个口袋”， $i=0,1,2,\cdots,n$；

$A=$“有放回地抽，前r次全是红球”；

$B=$“前$r+1$次都是红球”.

则

$$P(C_i)=\frac{1}{n+1}.$$

要求 $P(B|A)$.

$$\begin{aligned}P(B|A)&=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{\sum_{i=0}^{\infty}P(B|C_i)P(C_i)}{\sum_{i=0}^{n}P(A|C_i)P(C_i)}\\&=\frac{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n-i}{n}\right)^{r+1}}{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n-i}{n}\right)^{r}}=\frac{\sum_{i=0}^{n}(n-i)^{r+1}}{n\sum_{i=0}^{n}(n-i)^{r}}\end{aligned}$$

1.33 设抽到第一盒火柴为成功，用“1”表示； 抽到第二盒火柴用“0”表示。

下面提供三种不同理解，一种理解对应一种答案，只要理解与答案对上号就可以。

第一种理解：关心的是“在抽取过程中出现一盒火柴空，而另一盒火柴为r根”。共抽取$2n-r$次， 看成$2n-r$次Bernoulli试验。用X表示前$2n-r$次中成功次数。所求概率

$$p=2P(X=n)=2C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}.$$

第二种理解：抽走某盒中最后一根火柴时，不知道此盒中已空，当再次打开此盒时发现已空，抽样停止，停止时另一盒中恰有r根。 共抽取$2n-r+1$次， 看成$2n-r+1$次Bernoulli试验。 用X表示前$2n-r$次中成功次数。 所求概率

$$p=2P(X=n)\cdot\mathbf{\frac{1}{2}}=2C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}\cdot\mathbf{\frac{1}{2}}=C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}.$$

黑体的“$\mathbf{\frac{1}{2}}$” 表示第$2n-r+1$次必须是“成功”。

第三种理解：关心的是“当首次遇到某一盒空时，另一盒火柴为r根”。抽走某盒中最后一根火柴时，知道此盒中再没有火柴可抽，抽样停止，停止时另一盒中恰

有r根. 共抽取$2n-r$次， 看成$2n-r$次Bernoulli试验。用X表示前$2n-r-1$次中成功次数。 所求概率

$$p = 2P(X=n-1)\cdot\mathbf{\frac{1}{2}} = 2C_{2n-r-1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r-1}\cdot\mathbf{\frac{1}{2}} = C_{2n-r-1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r-1}.$$

黑体的“$\mathbf{\frac{1}{2}}$” 表示第$2n-r$次必须是“成功”。