

2025 学年秋季学期随机分析课程作业 与相关信息

December 25, 2025

主要教材:

1. Karatzas I., Shreve S.E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2nd ed. GTM 113. Springer 1991 [KS]
2. 龚光鲁, 钱敏平. 随机微分方程引论 第三版 电子工业出版社 北京 2019 [GQ]

主要参考书目:

3. Le Gall J-F. *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*. GTM 274. Springer 2016 [LG]
4. Revuz D., Yor M. *Continuous Martingale and Brownian Motion*. 3rd ed. Springer 1999 [RY]
5. Chung K.L., Williams R.J. *Introduction to Stochastic Integration*. 2nd ed. Birkhäuser 1990 [CW1]
龚光鲁 译 钟开莱随机积分导论 第二版 世界图书出版公司 2021 [CW2]

更多教学信息:

<http://www.math.pku.edu.cn/teacher/liuyong/teachingindex.html>

Contents

1 9 月 9 日	1
2 9 月 11 日	2
3 9 月 18 日	3
4 9 月 23 日	4
5 9 月 25 日	5
6 10 月 9 日	6
7 10 月 16 日	7
8 10 月 21 日	8
9 10 月 23 日	9
10 10 月 30 日 (今天有测验)(习题有答案提示)	11
11 11 月 4 日	12
12 11 月 6 日	13
13 11 月 13 日	14
14 11 月 18 日	15
15 11 月 20 日	16
16 11 月 27 日	17
17 12 月 2 日	18
18 12 月 4 日	19
19 12 月 11 日 (今天有测验)	20
20 12 月 16 日	21
21 12 月 18 日 (习题有答案提示)	22
22 12 月 25 日	23

1 9月9日

1. 阅读 [GQ] p2-3 引理 1.1、引理 1.2 和引理 1.3, 或者《随机微积分和 Itô 公式》引理 5.3.1、推论 5.3.1、引理 5.3.2 和引理 5.3.3.
2. 阅读《随机微积分和 Itô 公式》(由助教发给选课的同学).

2 9 月 11 日

1. 设 ξ_t 是定义在带流概率空间取值于 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 的轨道右连续的随机过程. 若 G 是开集, 证明 $\tau(\omega) = \inf\{t > 0, \xi_t \in G\}$ 是宽停时; 若 ξ_t 的轨道是连续的, F 是闭集, 证明 $\tau'(\omega) = \inf\{t > 0, \xi_t \in F\}$ 是停时.

可以参阅 [KS]p7 Problem 2.6, 2.7

也可以参阅 《随机过程引论》(第二版) 钱敏平 龚光鲁 编著 北京大学出版社 p43 例 7 (但这个证明有些漏洞)

2. 阅读 [KS]p1-5. p47-71 (Chapter 2.1-2.4), p10 Definition 2.25
3. 阅读 [GQ]p2 定义 1.4, 1.5, p3 定义 1.6; 命题 1.1
4. [KS] p4 Exercise 1.7, Exercise 1.8

3 9 月 18 日

1. 若将平方可积鞅限制在有限闭区间 $[0, T]$, 得到 $\mathcal{M}_{2,T}(\mathcal{F}_t) = \{(M_t)_{t \in [0,T]} \text{ 是 } (\mathcal{F}_t) \text{ 右连左极平方可积鞅}\}$, 在其中定义范数 $\|M\|_{2,T} = (EM_T^2)^{\frac{1}{2}}$.

- (1) 证明: $\mathcal{M}_{2,T}(\mathcal{F}_t)$ 在范数 $\|M\|_{2,T}$ 下成为一个 Hilbert 空间;
- (2) 记 $M_{2,T}^c(\mathcal{F}_t) = \{(M_t)_{t \in [0,T]} \text{ 是 } (\mathcal{F}_t) \text{ 连续平方可积鞅}\}$. 证明: $M_{2,T}^c(\mathcal{F}_t)$ 是 $\mathcal{M}_{2,T}(\mathcal{F}_t)$ 的闭子空间.

可以参阅 [GQ] p12 引理 1.7

2. 设 N_t 是强度参数为 λ 的 Poisson 过程. $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s, s \leq t)$.

- (1) 求 $(N_t - \lambda t)_{t \geq 0}^2$ 的 Doob-Meyer 分解;
- (2) 设 $(X_n)_{n \geq 0}$ 是 i.i.d 的随机变量序列, X_0 的密度函数为 $p(x)$, $E|X_0| < \infty$, $(N_t)_{t \geq 0}$ 与 $(X_n)_{n \geq 0}$ 独立的 Poisson 过程, 其强度参数为 λ . 设 $Y_t = \sum_{n=0}^{N_t} X_n$, 则 $(Y_t)_{t \geq 0}$ 是一个时间齐次的独立增量过程, 称为复合 Poisson 过程. 此问中取 $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s, s \leq t)$. 求 $(Y_t)_{t \geq 0}$ 的 Doob-Meyer 分解.

3. 设 X_t 是一个单生过程, 即其状态空间为 $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, 转移速率矩阵 Q 满足

$$Q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & j = i + 1, \\ -\lambda_i & j = i. \end{cases}$$

进一步假定 $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$, 即 X_t 非爆炸 (保守的), 而且 $t \geq 0$, $EX_t < \infty$, $X_0 = 0$. 求 X_t 的 Doob-Meyer 分解并证明你的结论.

4. 阅读 [GQ] 第 1.2, 1.3 节内容; p76 定理 2.1, p77 命题 2.19, 定义 2.23, 例 1; p78 命题 2.21.
5. 阅读 [KS] Chapter 1.4; Chapter 1.5 p30-p31.
6. 阅读 [KS] p32-34, Theorem 5.8, Lemma 5.9, Lemma 5.10 及其证明.
7. 阅读 [LG] p79-84, Theorem 4.9 及其证明.
8. 有兴趣的同学可以阅读 [CW2] p18-22 可料集和可料过程等概念的进一步讨论.

4 9 月 23 日

1. 设 $(M_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c(\mathcal{F}_t)$. 证明:

(1) 设 $0 \leq t_0 \leq t_1 < t_2$, ξ_{t_1} 关于 $\mathcal{F}_{t_1}$ 可测的有界随机变量, 则

$$\mathbb{E}[\xi_{t_1}(M_{t_2} - M_{t_1})^2 | \mathcal{F}_{t_0}] = \mathbb{E}[\xi_{t_1}^2 (\langle M \rangle_{t_2} - \langle M \rangle_{t_1}) | \mathcal{F}_{t_0}].$$

(2) 设 $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, ξ_{t_1} 是关于 $\mathcal{F}_{t_1}$ 可测的有界随机变量, ξ_{t_3} 是关于 $\mathcal{F}_{t_3}$ 可测的有界随机变量, 则

$$\mathbb{E}[\xi_{t_1} \xi_{t_3} (M_{t_4} - M_{t_3})(M_{t_2} - M_{t_1}) | \mathcal{F}_{t_0}] = 0.$$

2. 证明 [KS]p137-138 中的等式 (2.13),(2.14) 和 (2.16).

3. [KS] p35 Problem 5.12

设 $X \in \mathcal{M}_2^c$, T 是 $(\mathcal{F}_t)$ 停时. 若 $\langle X \rangle_T = 0, a.s.dP$, 证明:

$$P(X_{T \wedge t} = 0, \forall 0 \leq t \leq \infty) = 1.$$

4. 做 [KS]p20 Problem 3.24 (可以参阅 [RY] p71 Corollary 3.6)

5. 阅读 [KS]p128-145

5 9 月 25 日

1. (1) 证明: $|\langle X, Y \rangle|^2 \leq \langle X \rangle \langle Y \rangle$.
- (2) 设 $\xi_t = \langle X, Y \rangle_t$, $\check{\xi}_t$ 是 ξ 在 $[0, t]$ 上的全变差, 证明:

$$\check{\xi}_t(\omega) - \check{\xi}_s(\omega) \leq \frac{1}{2} [\langle X \rangle_t(\omega) - \langle X \rangle_s(\omega) + \langle Y \rangle_t(\omega) - \langle Y \rangle_s(\omega)]$$

几乎处处成立.

可以参阅 [GQ] p78 命题 2.20 Kunita-Watanabe 不等式的证明. [KS] p31 Problem 5.7

2. 设 $X, Y \in \mathcal{L}^0$, $M, N \in \mathcal{M}_2^c$, 证明:

$$\langle I^M(X), I^N(Y) \rangle_t = \int_0^t X_u Y_u d\langle M, N \rangle_u.$$

3. 证明 Kunita-Watanabe 不等式.

参考 [KS] p142-143 Proposition 2.14 和 [GQ] p78 命题 2.20.

6 10 月 9 日

1. 设 $M \in \mathcal{M}_2^c(\mathcal{F}_t)$, τ 为 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 停时.
 - (1) 证明: $(M_{t \wedge \tau})_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_2^c(\mathcal{F}_t)$;
 - (2) 求 $(M_{t \wedge \tau})_{t \geq 0}$ 的特征;
 - (3) 若对于任意的 $t \geq 0$, $M_{t \wedge \tau} = 0$, 证明: 对于任意的 $N \in \mathcal{M}_2^c(\mathcal{F}_t)$, 任意的 $t \geq 0$, $\langle M, N \rangle_{t \wedge \tau} = 0$.
2. 阅读 [KS] p36 Definition 5.15.
3. 阅读 [KS] p36 Remark 5.16, 并完成 Remark 中提示的习题.
4. 阅读 [GQ] p79 命题 2.22.
5. [RY] p131 Exercise 1.27

7 10 月 16 日

1. Suppose $M, N \in \mathcal{M}^{c,loc}$ and $X \in \mathcal{P}_g^*(M) \cap \mathcal{P}_g^*(N)$. Shows that for every pair (α, β) of real numbers we have

$$I^{\alpha M + \beta N}(X) = \alpha I^M(X) + \beta I^N(X).$$

[KS] p147 Problem 2.25

2. 阅读 [KS] p145-148
3. 利用 [KS] p32 Theorem 5.8 证明 [KS] p149 Problem 3.2.
4. 设 $B = (B_t)_{0 \leq t \leq 1}$ 是标准布朗运动. $X = (aB_t)_{0 \leq t \leq 1}$, 其中 $a > 0, a \neq 1$. 证明: B 和 X 在 $(C([0, 1]), \mathcal{B}(C([0, 1])))$ 上诱导的测度相互奇异.
5. 阅读 [GQ] p25-29 Itô 公式证明, 阅读 [KS] p149-153 Itô 公式证明.
6. [KS] p155 Problem 3.12

Suppose we have two continuous semimartingales

$$X_t = X_0 + M_t + B_t, \quad Y_t = Y_0 + N_t + C_t; \quad 0 \leq t < \infty,$$

where M and N are in $\mathcal{M}^{c,loc}$ and B and C are adapted, continuous processes of bounded variation with $B_0 = C_0 = 0$ a.s. Prove the integration by parts formula

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \langle M, N \rangle_t.$$

7. 阅读 [KS] p153-156
8. 阅读 [GQ] p29-37
9. 阅读 [GQ] p3 命题 1.1, [KS] p85 Lemma 6.13.
10. [KS] p158 Exercise 3.17 Let $W_t = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, W_t^{(3)})$ be a three-dimensional Brownian motion starting at the origin and define

$$X = \prod_{i=1}^3 \text{sgn}(W_1^{(i)}),$$

$$M_t^{(1)} = W_t^{(1)}, M_t^{(2)} = W_t^{(2)}, M_t^{(3)} = XW_t^{(3)}.$$

Show that each of the pairs $(M^{(1)}, M^{(2)})$, $(M^{(1)}, M^{(3)})$ and $(M^{(2)}, M^{(3)})$ is a two-dimensional Brownian motion, but $(M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)})$ is not a three-dimensional Brownian motion. Explain why this does not provide a counter-example to Theorem 3.16, i.e., a three-dimensional processes which is not a Brownian motion but which has components in $\mathcal{M}^{c,loc}$ and satisfies

$$\langle M^{(k)}, M^{(j)} \rangle_t = \delta_{ij} t; \quad 1 \leq k, j \leq d.$$

11. 设 $\phi \in \mathcal{L}_2^{loc}$, 若 $\langle \int_0^\cdot \phi_s dB_s \rangle_t = f(t)$, 其中 $f(t)$ 为连续严格单调的非随机函数. 证明: $(\int_0^t \phi_u dB_u)_{t \geq 0}$ 为独立增量过程且 $\int_s^t \phi_u dB_u$ 服从 $N(0, f(t) - f(s))$.
12. 阅读 [LG] 第 5.1 节、第 5.2 节和第 5.3.1 节.

8 10 月 21 日

1. 设 $(B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$ 是二维布朗运动, $(B_0^{(1)})^2 + (B_0^{(2)})^2 \neq 0$. 判断 $(B_t^{(1)} B_t^{(2)})_{t \geq 0}$ 与 $(\ln[(B_t^{(1)})^2 + (B_t^{(2)})^2])_{t \geq 0}$ 是否是 $(\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$ 鞅, 是否是 $(\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$ 局部鞅, 并请写出你的判断的数学证明.
2. 阅读 [KS] p158-163
3. 阅读 [KS]163-167 Martingale Moment Inequalities.
4. 阅读《一维扩散过程尺度函数讲义》(由助教发给选课同学).
5. 考虑如下的随机微分方程 (平方 Bessel 过程)

$$dX(t) = ndt + 2\sqrt{X(t)}dB_t,$$

其中, n 为大于 1 的正整数. 设 $\tau_0 = \inf\{t \geq 0, X_t = 0\}$. 证明: $P(\tau_0 = \infty | X_0 = x) = 1$, $x > 0$.

6. [KS] p162 Problem 3.23

Let $R = \{R_t, \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ be a Bessel process with dimension $d \geq 2$ starting at $r > 0$, and define

$$m = \inf_{t \geq 0} R_t.$$

- (i) Show that if $d = 2$, then $m = 0$ a.s. P.
- (ii) Show that if $d \geq 3$, then m has the beta distribution

$$P(m \leq c) = \left(\frac{c}{r}\right)^{d-2}; \quad 0 \leq c \leq r.$$

7. [KS] p163 Problem 3.24

Let R be a Bessel process with dimension $d \geq 3$ starting at $r \geq 0$. Show that

$$P(\lim_{t \rightarrow \infty} R_t = \infty) = 1.$$

8. 阅读 [KS] p169-173; 阅读 p174 Problem 4.5 (预习).
9. 阅读 [GQ] p145 引理 3.8 及其证明; p37-39.
10. 利用内蕴时间变换给 10 月 16 日第 11 题一个新的证明.
11. 能否构造一个连续局部鞅 $(M_t)_{t \in [0,1]}$ 其特征是 $[0,1]$ 上的康托函数.

9 10 月 23 日

1. 有兴趣的同学可以读下面论文的 Proposition 3.

Nualart, D. and Peccati, G., Central limit theorems for sequences of multiple stochastic integrals. *Ann. Probab.* (2005) Vol. 33. No.1 p177-193

2. 设 $(B_t = B_t^{(1)} + iB_t^{(2)})_{t \geq 0}$ 是复 BM, 其中 $B^{(1)}$ 和 $B^{(2)}$ 独立的 BM. 设 $D \subset \mathbb{C}$ 是一个连通开子集, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ 是一个非常数的解析函数, $\tau_D = \inf\{t \geq 0, B_t \notin D\}$, $B_0 = z \in D$. 设 $S_t = \int_0^t |f'(B_r)|^2 dr$, $0 \leq t < \tau_D$, $\sigma_s = S_s^{-1}$, 即 $\int_0^{\sigma_s} |f'(B_r)|^2 dr = s$. 证明: $Y_s = f(B_{\sigma_s})$, $0 \leq s < S_{\tau_D}$ 与从 $f(z)$ 出发在 S_{τ_D} 上停止的复 BM 同分布.

3. 阅读 [KS] p174-180 Continuous Local Martingales as Time-Changed Brownian Motions 章节及定理的详细证明. 关注 Proposition 4.8. 特别是比较 p179 页 Knight 定理的表述与课堂所讲的复 Brownian motion 例子间的差别.

4. 阅读 [KS] p38 Problem 5.24 及 p45 的解答提示.

5. 阅读并证明 [RY]p182 Dambis, Dubins-Schwarz 定理的一般化 (Theorem 1.7).

There exist an enlargement $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{P})$ of $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ and a BM $\tilde{\beta}$ on $\tilde{\Omega}$ independent of M such that the process

$$B_t = \begin{cases} M_{T_t} & \text{if } t < \langle M \rangle_\infty, \\ M_\infty + \tilde{\beta}_{t - \langle M \rangle_\infty} & \text{if } t \geq \langle M \rangle_\infty \end{cases}$$

is a standard BM. The process

$$W_t = \begin{cases} M_{T_t} & \text{for } t < \langle M \rangle_\infty \\ M_\infty & \text{if } t \geq \langle M \rangle_\infty \end{cases}$$

is a $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ -BM stopped at $\langle M \rangle_\infty$.

3. 阅读并证明 [RY]p183 Proposition

For a continuous local martingales M , the sets $\{\langle M \rangle_\infty < \infty\}$ and $\{\lim_{t \rightarrow \infty} M_t \text{ exists}\}$ are almost-surely equal. Furthermore, $\limsup_{t \rightarrow \infty} M_t = +\infty$ and $\liminf_{t \rightarrow \infty} M_t = -\infty$ a.s. on the set $\{\langle M \rangle_\infty = \infty\}$.

6. [RY]p186 Exercise 1.15

Let M be a continuous local martingale. Prove that on $\{\langle M \rangle_\infty = \infty\}$, one has

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t}{\sqrt{2\langle M \rangle_t \log \log \langle M \rangle_t}} = 1 \text{ a.s.}$$

7. [RY]p187 Exercise 1.20 If X is a cont. semimartingale and λ the Lebesgue measure on $\mathbb{R}_+$ prove that

$$\lambda\left(\left\{t \geq 0 : \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-\alpha} |X_{t+\varepsilon} - X_t| > 0\right\}\right) = 0 \text{ a.s.}$$

for every $\alpha < \frac{1}{2}$.

8. [KS]p178 Problem 4.11

We cannot expect to be able to define the stochastic integral $\int_0^1 X_s dW_s$ with respect to BM W for measurable adapted processes X which do not satisfy $\int_0^1 X_s^2 ds < \infty$ a.s. Indeed, show that if

$$P\left[\int_0^t X_s^2 ds < \infty\right] = 1, \text{ for } 0 \leq t < 1 \text{ and } E \triangleq \left\{\int_0^1 X_s^2 ds = \infty\right\},$$

then

$$\limsup_{t \uparrow 1} \int_0^t X_s dW_s = -\liminf_{t \uparrow 1} \int_0^t X_s dW_s = +\infty, \text{ a.s. on } E.$$

9. **[KS]p179 Problem 4.12** Consider the semimartingale $X_t = x + M_t + C_t$ with $x \in \mathbb{R}$, $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$, C a continuous process of bounded variation, and assume that there exists a constant $\rho > 0$ such that $|C_t| + \langle M \rangle_t \leq \rho t, \forall t \geq 0$ is valid almost surely. Show that for fixed $T > 0$ and sufficiently large $n \geq 1$, we have

$$P\left[\max_{0 \leq t \leq T} |X_t| \geq n\right] \leq \exp\left\{\frac{-n^2}{18\rho T}\right\}.$$

10. 阅读 [KS] p180-190 内容, 特别关注 p189 Exercise 4.22.
11. 阅读 [GQ] p45-48 内容, 特别关注定理 1.9 关于 $[0, \infty)$ 区间的讨论

10 10 月 30 日 (今天有测验)(习题有答案提示)

1. 设 (B_t) 是标准布朗运动. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 为 $(B_t)_{t \geq 0}$ 的通常化扩张. 利用鞅表示定理证明并求去存在一个 $\mathcal{L}^*(B)$ 过程 $(H_t)_{t \geq 0}$ 使得

$$B_1^3 = \int_0^1 H_s dB_s.$$

4. [RY] p206 Exercise 3.16

Let t be fixed and ϕ be a bounded measurable function on $\mathbb{R}$. Find the explicit martingale representation for the random variable $F = \exp\left(\int_0^t \phi(B_s) ds\right)$.

提示:

设 $M_s = E[F|\mathcal{F}_s]$, $0 \leq s \leq t$; $v(s, x) = E\left(\exp\left(\int_s^t \phi(B_u) du\right) | B_s = x\right)$.

— 由 Brown 运动的马氏性可以得到

$$\begin{aligned} M_s &= \exp\left(\int_0^s \phi(B_u) du\right) E\left[\exp\left(\int_s^t \phi(B_u) du\right) | \mathcal{F}_s\right] \\ &= \exp\left(\int_0^s \phi(B_u) du\right) E\left[\exp\left(\int_s^t \phi(B_u) du\right) | B_s\right] \\ &= \exp\left(\int_0^s \phi(B_u) du\right) v(s, B_s). \end{aligned}$$

— 由 Feynman-Kac 公式得到

$$\begin{cases} -\frac{\partial v(s, x)}{\partial s} = \frac{1}{2} \Delta v(s, x) + \phi(x) v(s, x) \\ v(t, x) = 1 \end{cases}.$$

— 由 Itô 公式

$$\begin{aligned} dv(s, B_s) &= \left(\frac{\partial v(s, B_s)}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v(s, B_s)}{\partial x^2}\right) ds + \frac{\partial v(s, B_s)}{\partial x} dB_s \\ &= -\phi(B_s) v(s, B_s) ds + \frac{\partial v(s, B_s)}{\partial x} dB_s. \end{aligned}$$

— 记 $Y_s = \exp\left(\int_0^s \phi(B_u) du\right)$, 则 $M_s = Y_s v(s, B_s)$.

$$\begin{aligned} dM_s &= d(Y_s v(s, B_s)) \\ &= v(s, B_s) dY_s + Y_s dv(s, B_s) \\ &= Y_s \phi(B_s) v(s, B_s) ds + Y_s \left[-\phi(B_s) v(s, B_s) ds + \frac{\partial v(s, B_s)}{\partial x} dB_s\right] \\ &= Y_s \frac{\partial v(s, B_s)}{\partial x} dB_s. \end{aligned}$$

将 M_s 写成随机积分的形式为

$$M_s = E\left[\exp\left(\int_0^t \phi_u(B_u) du\right) | B_0\right] + \int_0^s Y_u \frac{\partial v(u, B_u)}{\partial x} dB_u.$$

11 11 月 4 日

1. [KS] p167 Exercise 3.31. 习题具体见 [KS], 这里不再抄录.
2. 利用 Picard 迭代求解如下的线性随机微分方程:

$$dX_t = \lambda X_t dB_t, X_0 = \xi,$$

其中, ξ 与布朗运动 $(B_t)_{t \geq 0}$ 独立.

(可以参考 [GQ] p130 例 1)

3. Wiener-Itô 混沌分解的内容可以参考 M. Hairer 的讲义
<https://www.hairer.org/notes/Malliavin.pdf>
 或者如下参考书的相关章节
 D. Nualart and E. Nualart, *Introduction to Malliavin Calculus*. Cambridge University Press, 2018
4. 阅读 [KS] p190-201, 多关注 p192 Discussion 和 p193 Remark 的内容; [GQ] p39-45 内容
5. 证明: [GQ] p33 引理 1.19. 即:
 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 上鞅 X 是 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 鞅, 当且仅当 $EX_t = \text{常数}, \forall t$.
6. Brown 运动 Lévy 构造的内容可以参考
 P. Mörtter and Y. Peres, *Brownian Motion*. (Cambridge University Press 2010) p9-12 内容
 或者
 R.L. Schilling, *Brownian Motion. 3rd Edition* (DE GRUYTER 2021) Section 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 内容

12 11 月 6 日

1. [KS] p147, Problem 2.28.

2. [KS] p201, Exercise 5.18

With $W = \{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq 1\}$ is a Brownian motion, we define $T = \inf\{0 \leq t \leq 1; t + W_t^2 = 1\}$, $X_t = -\frac{2}{(1-t)^2}W_t\mathbf{1}_{\{t \leq T, t < 1\}}$; $0 \leq t < 1$,

(i) Prove that $P(T < 1) = 1$, and therefore $\int_0^1 X_t^2 dt < \infty$ a.s.

(ii) Apply Itô's rule to the process $\{(\frac{W_t}{1-t})^2; 0 \leq t < 1\}$ to conclude that

$$\int_0^1 X_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^1 X_t^2 dt = -1 - 2 \int_0^T \left[\frac{1}{(1-t)^4} - \frac{1}{(1-t)^3} \right] W_t^2 dt \leq -1.$$

(iii) The exponential supermartingale $\{Z_t(X), \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq 1\}$ is not a martingale; however, for each $n \geq 1$ and $\sigma_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\{Z_{t \wedge \sigma_n}(X), \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq 1\}$ is a martingale.

3. [KS] p201, Exercise 5.20

Suppose that $\{L_t, \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0} \in \mathcal{M}^{c,loc}$ is such that $Z_t = \exp[L_t - \frac{1}{2}\langle L \rangle_t]$ is a martingale under P , and define the new probability measure $\tilde{P}_T(A) = E(\mathbf{1}_A Z_T)$; $A \in \mathcal{F}_T$, then

$$\tilde{M}_t = M_t - \langle L, M \rangle_t = M_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} d\langle Z, M \rangle_s, 0 \leq t \leq T$$

is a $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ continuous local under $\tilde{P}$.

4. [RY] p334, Exercise 1.23

Let B be the standard BM. For any stopping time T such that $E[\exp(\frac{1}{2}T)] < \infty$, prove that

$$E[\exp(B_T - \frac{1}{2}T)] = 1.$$

5. [RY] p334, Exercise 1.24

(1) Let B be the standard BM and prove that

$$T = \inf\{t : B_t^2 = 1 - t\}$$

is a stopping time such that $P(0 < T < 1) = 1$.

(2) Set $H_s = -\frac{2B_s\mathbf{1}_{\{T \geq s\}}}{(1-s)^2}$ and prove that for every t ,

$$\int_0^t H_s^2 ds < \infty, \text{ a.s.}$$

(3) If $M_t = \int_0^t H_s dB_s$, compute $M_t - \frac{1}{2}\langle M, M \rangle_t + (1 - t \wedge T)^{-2} B_{T \wedge t}$.

(4) Prove that $E[\exp(M_1 - \frac{1}{2}\langle M \rangle_1)] < 1$ and hence that $\{\exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t), t \in [0, 1]\}$ is not a martingale.

13 11 月 13 日

1. [RY] p336, Exercise 1.36

Let P be the Wiener measure on $\Omega = C([0, 1], \mathbb{R})$, $\mathcal{F}_t = \sigma(\omega(s), s \leq t)$ and b be a bounded predictable process. We set

$$Q = \exp \left\{ \int_0^1 b(s, \omega) d\omega(s) - \frac{1}{2} \int_0^1 b^2(s, \omega) ds \right\} \cdot P$$

and $\theta(\omega)_t = \omega(t) - \int_0^t b(s, \omega) ds$.

Prove that if $(M_t, t \leq 1)$ is a $(\mathcal{F}_t, P)$ -martingale then $(M_t \circ \theta, t \leq 1)$ is a $(\mathcal{F}_t, Q)$ -martingale. For instance, if h is a function of class $C^{2,1}$ such that $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0$ then $h(\theta(\omega)_t, t)$ is a $(\mathcal{F}_t, Q)$ -martingale.

2. 有兴趣的同学阅读可以阅读如下论文:

Sheffield, S. Gaussian free fields for mathematicians. *Probab. Theory Related Fields* 139 (2007), no. 3-4, 521–541.

3. 课堂上所讲的 Onsager-Machlup (OM) 泛函的内容可以阅读

Ikeda, N., Watanabe S. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. Second Edition, North-Holland Publishing Company, 1989

Chapter VI, Section 9 的内容.

进一步想了解 OM 泛函也可以阅读如下比较好读的文献:

Dürr, Detlef; Bach, Alexander. *The Onsager-Machlup function as Lagrangian for the most probable path of a diffusion process*. *Comm. Math. Phys.* 60 (1978), no. 2, 153–170.

4. 阅读 [GQ] p196-202 关于大偏差原理的内容

14 11 月 18 日

1. 阅读《随机微分方程及其应用概要》(龚光鲁 编著, 清华大学出版社 2008) p156 问题 2, 定理 7.13.

阅读 Ikeda, N., Watanabe S. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. Second Edition, North-Holland Publishing Company, 1989

Lemma 8.1 p519

2. 设 $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 是一个处处 C^1 光滑, 除有限个点 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 外, 处处 C^2 光滑, 且 $|g''(x)| \leq M$ (g'' 在不连续处左右极限存在). 证明: 下面的 Itô 公式成立:

$$g(B_t) = g(B_0) + \int_0^t g'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t g''(B_s) ds.$$

3. 阅读 [GQ] p104-116 关于局部时的内容
4. 阅读 [KS] p201-226 关于局部时的内容, 注意 [KS] 定义的局部时与上课讲的差了一个 $\frac{1}{2}$ 的系数
5. 阅读 [LG] Chapter 9, Local Times

15 11 月 20 日

1. 阅读 [KS] p209 Problem 6.12

For a continuous function $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ with compact support, the following interchange of Lebesgue and Itô integrals is permissible

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(a) \left(\int_0^t \mathbf{1}_{(a, \infty)}(W_s) dW_s \right) da = \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(a) \mathbf{1}_{(a, \infty)}(W_s) da \right) dW_s, \text{ a.s. } P^0.$$

2. 阅读 [KS] p225 Problem 7.7

Let X be a continuous semimartingale with decomposition

$$X_t = X_0 + M_t + V_t; \quad 0 \leq t < \infty,$$

μ be a σ -finite measure on $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, and $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ be a continuous function with compact support. Then

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(a) \left(\int_0^t \mathbf{1}_{(a, \infty)}(X_s) dM_s \right) \mu(da) = \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(a) \mathbf{1}_{(a, \infty)}(X_s) \mu(da) \right) dW_s.$$

3. Show that the semimartingale local time of a continuous process of bounded variation is identically zero.

16 11 月 27 日

1. 阅读 [KS] p281-290
2. 阅读 [GQ] p119-130, 请特别关注 p125 中的“第二步”以及 p129 定理 3.2 关于局部化的处理方法
3. 阅读 [RY] p365-375
4. 求如下随机微分方程

$$dX_t = -\frac{1}{2}e^{-2X_t}dt + e^{-X_t}dB_t, \quad X_0 = a \in \mathbb{R},$$

在爆炸时 ξ 之前的解.

(可以参考 [GQ] p128 定义 3.4)

5. [KS] p293 Exercise 2.17

The stochastic equation

$$X_t = 3 \int_0^t X_s^{\frac{1}{3}} ds + 3 \int_0^t X_s^{\frac{2}{3}} dW_s$$

has uncountable many strong solution of the form

$$X_t^{(\theta)} = \begin{cases} 0; & 0 \leq t < \beta_\theta, \\ W_t^3; & \beta \leq t < \infty, \end{cases}$$

where $0 \leq \theta \leq \infty$ and $\beta_\theta = \inf\{s \geq \theta; W_s = 0\}$.

17 12 月 2 日

1. 阅读 [KS] p291-300, 重点阅读 p291 Proposition 2.13 (Yamada-Watanabe 唯一性定理) 和 p293 Proposition 2.18 比较定理
2. 阅读 [LG] p231, Exercise 8.14.
3. [KS] p294 Exercise 2.19
4. [KS] p295 Exercise 2.20
5. [KS] p305 Exercise 3.12
6. [KS] p305 Problem 3.13.
7. [KS] p306 Problem 3.15
- 8 阅读 [KS] p301-306
- 9 阅读 [GQ] p132-145

18 12 月 4 日

1. 阅读 [KS] p306-311
2. 阅读 [GQ]p154 定理 3.6 及其证明, 并与 [KS] p305 Problem 3.13 比较.

19 12 月 11 日 (今天有测验)

1. 阅读 [KS] p314-320
2. 阅读 [GQ] p145-148
3. 考虑 SDE

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t b_i(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s) dW_s^j, \quad i = 1, \dots, d. \quad (1)$$

证明: 对于带流概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ 及其上的循序可测过程 X , 若任意的 $f \in C_0^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$,

$$M^f = f(t, X_t) - f(0, X_0) - \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) + \mathcal{A}_s f(s, X_s) \right] ds$$

为 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 鞅, 则 X 为 SDE(1) 的弱解 (可以在扩展的概率空间中考虑). 其中

$$\mathcal{A}_s g(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d a_{ik}(s, x) \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(s, x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x), \quad (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq d} = \sigma \sigma^T.$$

若 $g \in C_0^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^d)$, 求 $\langle M^f, M^g \rangle$.

20 12 月 16 日

1. 阅读 [KS] p319-328, 特别是 p321 Lemma 4.19
2. 阅读 [GQ] p186-203
3. 阅读 [GQ] p149-153
4. 阅读 [KS] p60-71

21 12 月 18 日 (习题有答案提示)

1. 阅读 [GQ] p77-95 第 2.4 节, 第 2.5 节, 第 2.6 节

2. 设 $(N_t)_{t \geq 0}$ 是强度参数为 λ 的 Poisson 过程. $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s, s \leq t)$. 已知 $(N_t - \lambda t)_{t \geq 0}$ 是鞅, 求其平方 (二次) 变差过程. (平方变差概念的定义可以参见 [GQ] p31 的 3° 或 [KS] p32 第二段内容)

3. 证明: 右连左极非随机函数 $f(t)$ 是半鞅的充要条件是 $f(t)$ 是有界变差的函数.

4. **有兴趣的同学可以思考:** 设 $(B_t)_{t \geq 0}$ 是一维 Brown 运动, 证明: $(|B_t|^\alpha)_{t \geq 0}, 0 < \alpha < 1$ 不是半鞅; $(\int_0^t (t-s)^\alpha dB_s)_{t \geq 0}, 0 < \alpha < \frac{1}{2}$ 不是半鞅.

5. 设 $(N_t)_{t \geq 0}$ 是强度参数为 λ 的 Poisson 过程. $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s, s \leq t)$. 已知 $(\tilde{N}(t) = N_t - \lambda t)_{t \geq 0}$ 是鞅, 利用随机积分的定义求 $\int_0^t \tilde{N}(s-) d\tilde{N}(s)$.

证明梗概: 设 $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$.

$$\begin{aligned} & \int_0^t \tilde{N}(s-) d\tilde{N}(s) \\ &= \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \tilde{N}(t_{i-1}-) [\tilde{N}(t_i) - \tilde{N}(t_{i-1})] \quad \text{in } L^2(\Omega) \\ &= \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \tilde{N}(t_{i-1}-) [\tilde{N}(t_i) - \tilde{N}(t_{i-1})] + \sum_{i=1}^n [\tilde{N}(t_{i-1}-) - \tilde{N}(t_{i-1})] [\tilde{N}(t_i) - \tilde{N}(t_{i-1})] \\ &= I + II. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n 2\tilde{N}(t_{i-1}-) \tilde{N}(t_i) - 2\tilde{N}^2(t_{i-1}-) \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^n [N^2(t_i) - N^2(t_{i-1}-) - (N(t_i) - N(t_{i-1}-))^2] \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} [\tilde{N}^2(t) - \tilde{N}^2(0)] - \frac{1}{2} \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\tilde{N}(t_i) - \tilde{N}(t_{i-1}-)]^2 \\ &= \frac{1}{2} [\tilde{N}^2(t) - N(t)] \end{aligned}$$

对于 II ,

$$\begin{aligned} & [\tilde{N}(t_{i-1}-) - \tilde{N}(t_{i-1})] [\tilde{N}(t_i) - \tilde{N}(t_{i-1})] \\ &= -\Delta N(t_{i-1}) [\tilde{N}(t_i) - \tilde{N}(t_{i-1})]. \end{aligned}$$

考虑 $E\left(\sum \Delta N(t_{i-1}) [\tilde{N}(t_i) - \tilde{N}(t_{i-1})]\right)^2$. 与布朗运动类似, 利用独立性, $E\tilde{N}(t) = 0$, 注意到 $\Delta N(t_{i-1})$ 与 $\tilde{N}(t_i) - \tilde{N}(t_{i-1})$ 独立, 可以证明交叉项为零.

$$\begin{aligned} & E\left[\sum (\Delta \tilde{N}(t_{i-1}))^2 (\tilde{N}(t_i) - \tilde{N}(t_{i-1}))^2\right] \\ &= \sum E(\Delta \tilde{N}(t_{i-1}))^2 E(\tilde{N}(t_i) - \tilde{N}(t_{i-1}))^2 \\ &= \sum E(\Delta \tilde{N}(t_{i-1}))^2 E(\tilde{N}(t_i) - \tilde{N}(t_{i-1}))^2. \end{aligned}$$

因为 $\tilde{N}(t)$ 在固定时间点方式跳的概率为 0, 所以 $E(\Delta \tilde{N}(t_{i-1}))^2 = 0$.

由此得到 $II = 0$. 综上所述 $\int_0^t \tilde{N}(s-) d\tilde{N}(s) = \frac{1}{2} [\tilde{N}^2(t) - N(t)]$.

22 12 月 25 日

1. 阅读 [GQ] p272-283 第 7.1 节

2. 设 X 是半鞅, 证明下面的方程

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t Y(s-)dX(s),$$

有如下唯一解

$$\begin{aligned} Y(t) &= \mathcal{E}(X)(t) := e^{X(t)-X(0)-\frac{1}{2}\langle X^c \rangle(t)} \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X(s)) e^{-\Delta X(s)} \\ &= e^{X(t)-X(0)-\frac{1}{2}[X](t)} \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X(s)) e^{(-\Delta X(s)) + \frac{1}{2}(\Delta X(s))^2}. \end{aligned}$$

$\mathcal{E}(X)$ 称为 X 的随机指数.

3. 设 X 是有限变差半鞅, 写出关于 X 的 Itô 公式.

4. 设 X 是有限变差半鞅, 且 $\Delta X(t) = 1$ 或 0 , 求 $\mathcal{E}(X)$.

(注记: 补充一个引理: 有限变差局部鞅是纯断的)

5. 阅读《应用随机分析讲义》p44-45, 例 3.2.2. (由助教发给大家)

6. 阅读 [GQ] p283-302 第 7.2-7.6 节; 也可以继续阅读 p302-332 第 7.7-7.9 节. 其中 Brown 运动游弋律是很有趣, 也很深刻的内容, 值得学学.

7. 设 T 是取值于 $(0, \infty)$ 的随机变量, $\forall t \geq 0, P(T > 0) > 0$. 记 $F(t)$ 为其分布函数. 设

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1 & t \geq T(\omega) \\ 0 & t < T \end{cases}.$$

$X_0 = 0, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 是 $(X_t)_{t \geq 0}$ 生成的事件域流经过通常化扩张得到的事件域流. $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 是下鞅. 证明: 其 Doob-Meyer 分解的可料增过程, 即其补偿子 (compensator) 是

$$A_t = \int_{(0, t \wedge T]} \frac{dF(s)}{1 - F(s-)}.$$

8. 设 T 是取值于 $(0, \infty)$ 的随机变量, $\forall t \geq 0, P(T > 0) > 0$. 记 $F(t)$ 为其分布函数. 设随机变量 $\xi(\omega)$ 满足 $P(\xi(\omega) = 0) = 0$. 设

$$Y_t(\omega) = \begin{cases} \xi(\omega) & t \geq T(\omega) \\ 0 & t < T \end{cases}.$$

$Y_0 = 0, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 是 $(Y_t)_{t \geq 0}$ 生成的事件域流经过通常化扩张得到的事件域流. 设

$$\mu(\omega, t, B) = \mathbf{1}_{\{t \geq T\}} \mathbf{1}_{\{\xi \in B\}},$$

其中 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. 设 $\lambda(B, t)$ 是 ξ 关于 T 的正则条件分布, $A_t = \int_{(0, t \wedge T]} \frac{dF(s)}{1 - F(s-)}$. 设

$$\mu_p(\omega, t, B) = \int_{(0, t]} \lambda(B, s) dA_s.$$

证明: $(\mu_p(\omega, t, B))_{t \geq 0}$ 是可料过程, 而且 $(\mu(\omega, t, B) - \mu_p(\omega, t, B), \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 为鞅. 进一步证明 $(Y_t)_{t \geq 0}$ 有如下随机测度的典则分解 (canonical decomposition):

$$Y_t(\omega) = \int_{(0, t]} \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} x [\mu(\omega, t, dx) - \mu_p(\omega, t, dx)] + \int_{(0, t]} \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} x \mu_p(\omega, t, dx).$$

9. 设 $(T_n, Z_n)_{n \geq 1}$ 是一列随机向量, $0 < T_n < T_{n+1} < \infty$, $Z_n \neq 0$. 设

$$X_t = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}},$$

$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$. $(X_t)_{t \geq 0}$ 称为标记点过程 (Marked Point Process). 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$, $E|Z_n| < \infty$, $\forall n \geq 1$. 设 $\forall n \geq 1$, $T_{n+1} - T_n$ 关于 $\mathcal{F}_{T_n}$ 的正则条件概率存在, 记

$$F_n(t) = P(T_{n+1} - T_n \leq t | \mathcal{F}_{T_n}), \quad F_0(t) = P(T_1 \leq t),$$

$$m_n = E[Z_{n+1} | \mathcal{F}_{T_n}] = E[X_{T_{n+1}} - X_{T_n} | \mathcal{F}_{T_n}],$$

$$A_t = \sum_{n=0}^{\infty} m_n \int_0^{t \wedge T_{n+1} - t \wedge T_n} \frac{dF_n(s)}{1 - F_n(s-)}.$$

证明: $(X_t)_{t \geq 0}$ 可以分解为 (其实就是 Doob-Meyer 分解)

$$X_t = X_t - A_t + A_t,$$

其中 $(A_t)_{t \geq 0}$ 为可料有界变差过程, $(X_t - A_t)_{t \geq 0}$ 为 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 鞅.