测度论（Measure Theory）

主讲老师：刘勇

电子邮件：liuyong@math.pku.edu.cn

办公室：理科一号楼 1574 办公电话：62758519

http://www.math.pku.edu.cn/teachers/liuyong/teachingindex.html

助教: 白成 （1601210093@pku.edu.cn）
黄翔宇 （hxy19930702@pku.edu.cn）

2017-2018 学年第二学期

Outline

Outline

课程要求

1. 先修课程：概率论；实变函数 或 实变与泛函
2. 作业：
   每两周收一次，双周周五上课时交做作业，单周周五上课时发作业。
3. 答疑：暂定周二下午 3:00-4:00，理科一号楼1588
4. 要求：作业按时交；不迟到；不早退

课程要求

1. 先修课程：概率论；实变函数 或 实变与泛函
2. 作业：
   每两周收一次，双周周五上课时交做作业，单周周五上课时发作业。
3. 答疑：暂定周二下午 3:00-4:00，理科一号楼1588
4. 要求：作业按时交；不迟到；不早退

课程要求

1. 先修课程：概率论；实变函数 或 实变与泛函
2. 作业：
   每两周收一次，双周周五上课时交做作业，单周周五上课时发作业。
3. 答疑：暂定周二下午 3:00-4:00，理科一号楼1588
4. 要求：作业按时交；不迟到；不早退

课程要求

1. 先修课程：概率论；实变函数 或 实变与泛函
2. 作业：
   每两周收一次，双周周五上课时交做作业，单周周五上课时发作业。
3. 答疑：暂定周二下午 3:00-4:00，理科一号楼1588
4. 要求：作业按时交；不迟到；不早退

- 特点：抽象，难学
    - 经验：找例子，与实变函数，概率论，数学分析等课程相联系
    - 要求阅读的内容一定要读
- 成绩：
  平时成绩：10%　作业＋出勤
  期中考试：30%　随堂考试　时间：待定??
  期末考试：60%　6 月 22 日上午

- 特点：抽象，难学
  - 经验：找例子，与实变函数，概率论，数学分析等课程相联系
  - 要求阅读的内容一定要读
- 成绩：
  平时成绩：10%　作业＋出勤
  期中考试：30%　随堂考试　时间：待定??
  期末考试：60%　6 月 22 日上午

- 特点：抽象，难学
  - 经验：找例子，与实变函数，概率论，数学分析等课程相联系
  - 要求阅读的内容一定要读
- 成绩：
  平时成绩：10%　作业＋出勤
  期中考试：30%　随堂考试　时间：待定??
  期末考试：60%　6 月 22 日上午

- 特点：抽象，难学
  - 经验：找例子，与实变函数，概率论，数学分析等课程相联系
  - 要求阅读的内容一定要读
- 成绩：
  平时成绩：10%　作业＋出勤
  期中考试：30%　随堂考试　时间：待定??
  期末考试：60%　6 月 22 日上午

教材与教学参考书

- 教材：测度论与概率论基础　程士宏 编著　北京大学出版社
- 教学参考书：
  - 测度论讲义 第二版　严加安 编著　科学出版社
  - 现代概率论基础 第二版　汪嘉冈 编著　复旦大学出版社
  - 概率论基础 第二版　严士健 王秀骧 刘秀芳 编著　科学出版社
    测度与概率 第二版　严士健 刘秀芳 编著　北京师范大学出版社
  - Measure Theory　*P. Halmos*
  - Probability Theory　*M. Loéve*
  - …

教材与教学参考书

- 教材：测度论与概率论基础　程士宏 编著　北京大学出版社
- 教学参考书：
    - 测度论讲义 第二版　严加安 编著　科学出版社
    - 现代概率论基础 第二版　汪嘉冈 编著　复旦大学出版社
    - 概率论基础 第二版　严士健 王秀骧 刘秀芳 编著　科学出版社
      测度与概率 第二版　严士健 刘秀芳 编著　北京师范大学出版社
    - Measure Theory　*P. Halmos*
    - Probability Theory　*M. Loéve*
    - ...

教材与教学参考书

- 教材：测度论与概率论基础　程士宏 编著　北京大学出版社
- 教学参考书：
  - 测度论讲义 第二版　严加安 编著　科学出版社
  - 现代概率论基础 第二版　汪嘉冈 编著　复旦大学出版社
  - 概率论基础 第二版　严士健 王秀骧 刘秀芳 编著　科学出版社
    测度与概率 第二版　严士健 刘秀芳 编著　北京师范大学出版社
  - Measure Theory　*P. Halmos*
  - Probability Theory　*M. Loéve*
  - ...

教材与教学参考书

- 教材：测度论与概率论基础 程士宏 编著 北京大学出版社
- 教学参考书：
  - 测度论讲义 第二版 严加安 编著 科学出版社
  - 现代概率论基础 第二版 汪嘉冈 编著 复旦大学出版社
  - 概率论基础 第二版 严士健 王秀骧 刘秀芳 编著 科学出版社
    测度与概率 第二版 严士健 刘秀芳 编著 北京师范大学出版社
  - Measure Theory *P. Halmos*
  - Probability Theory *M. Loéve*
  - ...

教材与教学参考书

- 教材：测度论与概率论基础　程士宏 编著　北京大学出版社
- 教学参考书：
  - 测度论讲义 第二版　严加安 编著　科学出版社
  - 现代概率论基础 第二版　汪嘉冈 编著　复旦大学出版社
  - 概率论基础 第二版　严士健 王秀骧 刘秀芳 编著　科学出版社
    测度与概率 第二版　严士健 刘秀芳 编著　北京师范大学出版社
  - Measure Theory　*P. Halmos*
  - Probability Theory　*M. Loéve*
  - ...

目的：为什么要学测度论？

务虚：现代概率论，理论统计学的基本语言和平台 Why?

务实：抽象

- 统一：计数，Lebesgue 积分，奇异分布，无穷维空间
- 严格的数学基础：前行之保障

注记 1 概率论 vs 测度论

注记 2 实变函数 vs 测度论

目的：为什么要学测度论？

务虚：现代概率论，理论统计学的**基本语言和平台** Why?

务实：抽象

- 统一：计数，Lebesgue 积分，奇异分布，无穷维空间
- 严格的数学基础：前行之保障

注记 1 概率论 vs 测度论

注记 2 实变函数 vs 测度论

目的：为什么要学测度论？

务虚：现代概率论，理论统计学的**基本语言和平台** Why？

务实：抽象

- 统一：计数，Lebesgue 积分，奇异分布，无穷维空间
- 严格的数学基础：前行之保障

注记 1　概率论 vs 测度论

注记 2　实变函数 vs 测度论

目的：为什么要学测度论？

务虚：现代概率论，理论统计学的**基本语言和平台** Why？

务实：抽象

- 统一：计数，Lebesgue 积分，奇异分布，无穷维空间
- 严格的数学基础：前行之保障

注记 1 概率论 vs 测度论

注记 2 实变函数 vs 测度论

目的: 为什么要学测度论?

务虚: 现代概率论，理论统计学的**基本语言和平台** Why?

务实: 抽象

- 统一：计数，Lebesgue 积分，奇异分布，无穷维空间
- 严格的数学基础：前行之保障

注记 1　概率论 vs 测度论

注记 2　实变函数 vs 测度论

目的: 为什么要学测度论?

务虚: 现代概率论，理论统计学的**基本语言和平台** Why?

务实: 抽象

- 统一：计数，Lebesgue 积分，奇异分布，无穷维空间
- 严格的数学基础：前行之保障

注记 1 概率论 vs 测度论

注记 2 实变函数 vs 测度论

第零章 基础概率论的简单回顾

- 参考：概率论基础 第三版 李贤平 编著 p1-17 内容

一. 随机现象: 试验 (trial) 随机事件 **偶然性**

二. 频率稳定性: $F_N(A) = \frac{n}{N}$ 在某个固定常数附近摆动

- 随机事件发生可能性大小是随机事件的**客观属性**
- 如何度量这种客观属性：概率 $P(A)$

三. 频率与概率

- $0 \leq F_N(A) \leq 1$, $0 \leq P(A) \leq 1$
- 可加性

- 参考：概率论基础 第三版 李贤平 编著 p1-17 内容

一. 随机现象: 试验 (trial) 随机事件 **偶然性**

二. 频率稳定性: $F_N(A) = \frac{n}{N}$ 在某个固定常数附近摆动

- 随机事件发生可能性大小是随机事件的**客观属性**
- 如何度量这种客观属性：概率 $P(A)$

三. 频率与概率

- $0 \leq F_N(A) \leq 1$, $0 \leq P(A) \leq 1$
- 可加性

- 参考：概率论基础 第三版 李贤平 编著 p1-17 内容

一. 随机现象：试验 (trial) 随机事件 **偶然性**

二. 频率稳定性：$F_N(A) = \frac{n}{N}$ 在某个固定常数附近摆动

- 随机事件发生可能性大小是随机事件的**客观属性**
- 如何度量这种客观属性：概率 $P(A)$

三. 频率与概率

- $0 \leq F_N(A) \leq 1$, $0 \leq P(A) \leq 1$
- 可加性

- 参考：概率论基础　第三版　李贤平 编著 p1-17 内容

一. 随机现象: 试验 (trial)　随机事件 **偶然性**

二. 频率稳定性: $F_N(A) = \frac{n}{N}$ 在某个固定常数附近摆动

- 随机事件发生可能性大小是随机事件的**客观属性**
- 如何度量这种客观属性：概率 $P(A)$

三. 频率与概率

- $0 \leq F_N(A) \leq 1,\ 0 \leq P(A) \leq 1$
- 可加性

四. 样本空间, 样本点

五. 事件 (event): 定义为样本点的某个集合. 称某事件发生当且仅当它包含的某个样本点出现.
事件与集合相联系

六. 事件的运算
- 若 A 中的每一个样本点都包含在 B 中，则记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 亦称事件 B 包含了事件 A, 这时事件 A 发生必导致事件 B 发生.
- A^c：A 的对立事件或逆事件
- $A \cap B$ 或者 AB
- $A \cup B$
- ...
- 交换律，结合律，分配律，De Morgan 定理

七. 随机变量

四. 样本空间, 样本点

五. 事件 (event): 定义为样本点的某个集合. 称某事件发生当且仅当它包含的某个样本点出现.
事件与集合相联系

六. 事件的运算
- 若 A 中的每一个样本点都包含在 B 中，则记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 亦称事件 B 包含了事件 A, 这时事件 A 发生必导致事件 B 发生.
- A^c：A 的对立事件或逆事件
- $A \cap B$ 或者 AB
- $A \cup B$
- ...
- 交换律，结合律，分配律，De Morgan 定理

七. 随机变量

四. 样本空间, 样本点

五. 事件 (event): 定义为样本点的某个集合. 称某事件发生当且仅当它包含的某个样本点出现.
事件与集合相联系

六. 事件的运算

- 若 A 中的每一个样本点都包含在 B 中，则记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 亦称事件 B 包含了事件 A, 这时事件 A 发生必导致事件 B 发生.
- A^c：A 的对立事件或逆事件
- $A \cap B$ 或者 AB
- $A \cup B$
- ...
- 交换律，结合律，分配律，De Morgan 定理

七. 随机变量

四. 样本空间, 样本点

五. 事件 (event): 定义为样本点的某个集合. 称某事件发生当且仅当它包含的某个样本点出现.
事件与集合相联系

六. 事件的运算

- 若 A 中的每一个样本点都包含在 B 中，则记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 亦称事件 B 包含了事件 A, 这时事件 A 发生必导致事件 B 发生.
- A^c： A 的对立事件或逆事件
- $A \cap B$ 或者 AB
- $A \cup B$
- ...
- 交换律，结合律，分配律，De Morgan 定理

七. 随机变量

难道概率论只是测度论的一个特例吗？

Outline

集合系 (集类)

定义： σ 域, σ 代数，事件域

满足下列条件的集合系 $\mathscr{F}$ 称为 σ 域:

1. $X \in \mathscr{F}$;
2. $A \in \mathscr{F} \implies A^c \in \mathscr{F}$;
3. $A_n \in \mathscr{F},\ n = 1, 2, \cdots \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

定义： 可测空间

非空集合 X 和它上面的一个 σ 域 $\mathscr{F}$ 放在一起写成的 $(X, \mathscr{F})$ 称为**可测空间**.

集合系 (集类)

定义： σ 域, σ 代数，事件域

满足下列条件的集合系 $\mathscr{F}$ 称为 σ 域:

1. $X \in \mathscr{F}$;
2. $A \in \mathscr{F} \implies A^c \in \mathscr{F}$;
3. $A_n \in \mathscr{F},\ n = 1, 2, \cdots \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

定义： 可测空间

非空集合 X 和它上面的一个 σ 域 $\mathscr{F}$ 放在一起写成的 $(X, \mathscr{F})$ 称为**可测空间**.

集合系 (集类)

定义： π 系

如果 X 上的**非空**集合系 $\mathscr{P}$ 对**交**的的运算是**封闭的**, 即

$$A, B \in \mathscr{P} \Longrightarrow A \cap B \in \mathscr{P},$$

则称 $\mathscr{P}$ 为 π 系.

集合系 (集类)

定义： 半环

满足下列条件的 π 系 $\mathscr{D}$ 称为**半环**：对于任意的 $A, B \in \mathscr{D}$ 且 $A \supset B$, 存在有限个**两两不交**的 $C_k \in \mathscr{D}, k = 1, \cdots, n$, 使得

$$A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{n} C_k.$$

集合系 (集类)

定义： 环

如果非空集合系 $\mathscr{R}$ 对**并**和**差**的运算是封闭的, 即

$$A, B \in \mathscr{R} \Longrightarrow A \cup B, \quad A \setminus B \in \mathscr{R},$$

则称 $\mathscr{R}$ 为**环**.

集合系 (集类)

定义： 域, 代数

满足下列条件的 π 系 $\mathscr{A}$ 称为**域**:

$$X \in \mathscr{A};\ A \in \mathscr{A} \implies A^c \in \mathscr{A}.$$

定义： 域, 代数

满足下列条件的集合系 $\mathscr{A}$ 称为**域**:

1. $\mathscr{A}$ 非空;
2. $A \in \mathscr{A} \implies A^c \in \mathscr{A}$;
3. $A, B \in \mathscr{A} \implies A \cup B \in \mathscr{A}$. (有限并的运算封闭)

3.' $A, B \in \mathscr{A} \implies A \cap B \in \mathscr{A}$. (有限交的运算封闭)

集合系 (集类)

定义： 域, 代数

满足下列条件的 π 系 $\mathscr{A}$ 称为**域**:

$$X \in \mathscr{A};\ A \in \mathscr{A} \Longrightarrow A^c \in \mathscr{A}.$$

定义： 域, 代数

满足下列条件的集合系 $\mathscr{A}$ 称为**域**:

1. $\mathscr{A}$ 非空;
2. $A \in \mathscr{A} \Longrightarrow A^c \in \mathscr{A}$;
3. $A, B \in \mathscr{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$. (有限并的运算封闭)

3.' $A, B \in \mathscr{A} \Longrightarrow A \cap B \in \mathscr{A}$. (有限交的运算封闭)

集合系 (集类)

定义： 域, 代数

满足下列条件的 π 系 $\mathscr{A}$ 称为**域**:

$$X \in \mathscr{A};\ A \in \mathscr{A} \implies A^c \in \mathscr{A}.$$

定义： 域, 代数

满足下列条件的集合系 $\mathscr{A}$ 称为**域**:

1. $\mathscr{A}$ 非空;
2. $A \in \mathscr{A} \implies A^c \in \mathscr{A}$;
3. $A, B \in \mathscr{A} \implies A \cup B \in \mathscr{A}$. (有限并的运算封闭)

3.' $A, B \in \mathscr{A} \implies A \cap B \in \mathscr{A}$. (有限交的运算封闭)

命题:

半环是 π 系; 环是半环; 域是环.

集合系 (集类)

定义： 单调系

如果对集合系 $\mathscr{M}$ 中的任何单调序列 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 均有 $\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{M}$, 则称 $\mathscr{M}$ 为**单调系**.

集合系 (集类)

定义：λ 系

集合系 $\mathscr{L}$ 称为 λ **系**, 如果它满足下列条件:

1. $X \in \mathscr{L}$;
2. $A, B \in \mathscr{L}$ 且 $A \supset B \Longrightarrow A \setminus B \in \mathscr{L}$;
3. $A_n \in \mathscr{L}$ 且 $A_n \uparrow \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{L}$.

集合系 (集类)

命题:

λ 系是单调系; σ 域是 λ 系.

命题:

一个既是单调系又是域的集合系是 σ 域.

命题:

一个既是 λ 系又是 π 系的集合系是 σ 域.

集合系 (集类)

命题:

λ 系是单调系; σ 域是 λ 系.

命题:

一个既是单调系又是域的集合系是 σ 域.

命题:

一个既是 λ 系又是 π 系的集合系是 σ 域.

σ 域的生成

定义： 生成

称 $\mathscr{S}$ 为由集合系 $\mathscr{E}$ **生成** 的环 (或单调系, 或 λ 系, 或 σ 域), 如果下列条件被满足:

1. $\mathscr{S} \supset \mathscr{E}$;
2. 对任一环 (或单调系, 或 λ 系, 或 σ 域) $\mathscr{S}'$ 均有

$$\mathscr{S}' \supset \mathscr{E} \Longrightarrow \mathscr{S}' \supset \mathscr{S}.$$

由集合系 $\mathscr{E}$ **生成** 的环 (或单调系, 或 λ 系, 或 σ 域), 也就是包含$\mathscr{E}$ 的最小的环 .

σ 域的生成

定义： 生成

称 $\mathscr{S}$ 为由集合系 $\mathscr{E}$ **生成** 的环 (或单调系, 或 λ 系, 或 σ 域), 如果下列条件被满足:

1. $\mathscr{S} \supset \mathscr{E}$;
2. 对任一环 (或单调系, 或 λ 系, 或 σ 域) $\mathscr{S}'$ 均有
$$\mathscr{S}' \supset \mathscr{E} \Longrightarrow \mathscr{S}' \supset \mathscr{S}.$$

由集合系 $\mathscr{E}$ **生成** 的环 (或单调系, 或 λ 系, 或 σ 域), 也就是包含$\mathscr{E}$ **的最小的环** .

σ 域的生成

命题:

由集合系 $\mathscr{E}$ **生成** 的环 (或单调系, 或 λ 系, 或 σ 域) 均存在.

σ 域的生成

定理:

如果 $\mathscr{D}$ 是半环, 则

$$r(\mathscr{D})=\cup_{n=1}^{\infty}\left\{\cup_{k=1}^{n}A_k:\{A_k\in\mathscr{D},k=1,\cdots,n\}\text{两两不交}\right\}.$$

集（合）形式单调类定理

定理： 集（合）形式单调类定理

如果 $\mathscr{A}$ 是域, 则
$$\sigma(\mathscr{A}) = m(\mathscr{A}).$$

推论：

如果 $\mathscr{A}$ 是域, $\mathscr{M}$ 是单调系, 则
$$\mathscr{A} \subset \mathscr{M} \Longrightarrow \sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}.$$

集（合）形式单调类定理

定理： 集（合）形式单调类定理

如果 $\mathscr{A}$ 是域, 则

$$\sigma(\mathscr{A}) = m(\mathscr{A}).$$

推论：

如果 $\mathscr{A}$ 是域, $\mathscr{M}$ 是单调系, 则

$$\mathscr{A} \subset \mathscr{M} \Longrightarrow \sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}.$$

集（合）形式单调类定理

定理：集（合）形式单调类定理

如果 $\mathscr{P}$ 是 π 系, 则

$$\sigma(\mathscr{P}) = l(\mathscr{P}).$$

推论：

如果 $\mathscr{P}$ 是 π 系, $\mathscr{L}$ 是 λ 系, 则

$$\mathscr{P} \subset \mathscr{L} \Longrightarrow \sigma(\mathscr{P}) \subset \mathscr{L}.$$

集（合）形式单调类定理

定理：集（合）形式单调类定理

如果 $\mathscr{P}$ 是 π 系，则
$$\sigma(\mathscr{P}) = l(\mathscr{P}).$$

推论：

如果 $\mathscr{P}$ 是 π 系，$\mathscr{L}$ 是 λ 系，则
$$\mathscr{P} \subset \mathscr{L} \Longrightarrow \sigma(\mathscr{P}) \subset \mathscr{L}.$$

Outline

可测映射和可测函数

定义： 映射

设 X 和 Y 是任意给定的集合, 如果对每个 $x \in X$, 存在惟一的 $f(x) \in Y$ 与之对于, 则称对应关系 f 是**从 X 到 Y 到映射**或**定义在 X 上取值于 Y 的函数**. 对于任何 $x \in X$, $f(x)$ 称为映射 f 在 x 处的值.

定义： 原像

对任何 $B \subset Y$, 称

$$f^{-1}B \overset{\text{def}}{=} \{f \in B\} = \{x : f(x) \in B\}$$

为集合 B 在映射 f 下的原像.

可测映射和可测函数

定义： 集合系 $\mathscr{E}$ 在映射 f 下的原像

对任何 Y 上的集合系 $\mathscr{E}$, 称

$$f^{-1}\mathscr{E} \overset{\text{def}}{=} \{f^{-1}B : B \in \mathscr{E}\}$$

为集合系 $\mathscr{E}$ 在映射 f 下的原像 .

命题：

$$f^{-1}\emptyset = \emptyset;\ \ f^{-1}Y = X;$$

$$B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}B_1 \subset f^{-1}B_2;$$

$$(f^{-1}B)^c = f^{-1}B^c, \forall B \subset Y.$$

$$f^{-1}\bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup_{t\in T} f^{-1}A_t;\ \ f^{-1}\bigcap_{t\in T} A_t = \bigcap_{t\in T} f^{-1}A_t.$$

可测映射和可测函数

命题:

对于 Y 上的任何集合系 $\mathscr{E}$, 有

$$\sigma(f^{-1}\mathscr{E}) = f^{-1}\sigma(\mathscr{E}).$$

可测映射和可测函数

定义： 可测映射, 随机元

给定可测空间 $(X, \mathscr{F})$ 和 $(Y, \mathscr{S})$ 以及 X 到 Y 的映射 f. 如果

$$f^{-1}\mathscr{S} \subset \mathscr{F},$$

就把 f 叫做从 $(X, \mathscr{F})$ 到 $(Y, \mathscr{S})$ 的**可测映射或随机元**, 而

$$\sigma(f) \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}\mathscr{S}$$

叫做**使映射 f 可测的最小 σ 域**.

可测映射和可测函数

定理：

设 $\mathscr{E}$ 设 Y 上任给的集合系. 则 f 是 $(X, \mathscr{F})$ 到 $(Y, \sigma(\mathscr{E}))$ 的可测映射当且仅当

$$f^{-1}\mathscr{E} \subset \mathscr{F}.$$

定理：

设 g 是可测空间 $(X, \mathscr{F})$ 到 $(Y, \mathscr{S})$ 的可测映射, f 是 $(Y, \mathscr{S})$ 到可测空间 $(Z, \mathscr{Z})$ 的可测映射, 则

$$(f \circ g)(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} f(g(\cdot))$$

是 $(X, \mathscr{F})$ 到 $(Z, \mathscr{Z})$ 的可测映射.

可测映射和可测函数

定理:

设 $\mathscr{E}$ 设 Y 上任给的集合系. 则 f 是 $(X, \mathscr{F})$ 到 $(Y, \sigma(\mathscr{E}))$ 的可测映射当且仅当

$$f^{-1}\mathscr{E} \subset \mathscr{F}.$$

定理:

设 g 是可测空间 $(X, \mathscr{F})$ 到 $(Y, \mathscr{S})$ 的可测映射, f 是 $(Y, \mathscr{S})$ 到可测空间 $(Z, \mathscr{Z})$ 的可测映射, 则

$$(f \circ g)(\cdot) \overset{\text{def}}{=} f(g(\cdot))$$

是 $(X, \mathscr{F})$ 到 $(Z, \mathscr{Z})$ 的可测映射.

广义实数

定义： 广义实数

$$\overline{\mathbf{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$$

定义： 广义实数的序

- 两个实数按原序；
- $-\infty < a < \infty, \ \forall a \in \mathbf{R}.$

广义实数

定义： 广义实数

$$\overline{\mathbf{R}} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$$

定义： 广义实数的**序**

- 两个实数按原序；
- $-\infty < a < \infty,\ \forall a \in \mathbf{R}$.

广义实数

定义： 广义实数的四则运算

- $(\pm\infty) + a = a + (\pm\infty) = a - (\mp\infty) = \pm\infty, \quad \forall a \in \mathbf{R}$;
- $(\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty) - (\mp\infty) = \pm\infty$;
- $(\pm\infty) - (\pm\infty)$ 不被允许
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & 0 < a \leq \infty, \\ 0, & a = 0, \\ \mp\infty, & -\infty \leq a < 0. \end{cases}$
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0, \quad \forall a \in \mathbf{R}$.
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 不被允许

广义实数

定义： 广义实数的四则运算

- $(\pm\infty) + a = a + (\pm\infty) = a - (\mp\infty) = \pm\infty, \quad \forall a \in \mathbf{R};$
- $(\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty) - (\mp\infty) = \pm\infty;$
- $(\pm\infty) - (\pm\infty)$ 不被允许
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & 0 < a \leq \infty, \\ 0, & a = 0, \\ \mp\infty, & -\infty \leq a < 0. \end{cases}$
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0, \ \forall a \in \mathbf{R}.$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 不被允许

广义实数

定义： 广义实数的四则运算

- $(\pm\infty)+a=a+(\pm\infty)=a-(\mp\infty)=\pm\infty,\quad \forall a\in\mathbf{R};$
- $(\pm\infty)+(\pm\infty)=(\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty;$
- $(\pm\infty)-(\pm\infty)$ 不被允许
- $a\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot a=\begin{cases}\pm\infty, & 0<a\le\infty,\\ 0, & a=0,\\ \mp\infty, & -\infty\le a<0.\end{cases}$
- $\frac{a}{\pm\infty}=0,\ \forall a\in\mathbf{R}.$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 不被允许

广义实数

定义： 广义实数的**四则运算**

- $(\pm\infty) + a = a + (\pm\infty) = a - (\mp\infty) = \pm\infty, \quad \forall a \in \mathbf{R};$
- $(\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty) - (\mp\infty) = \pm\infty;$
- $(\pm\infty) - (\pm\infty)$ 不被允许
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & 0 < a \leq \infty, \\ 0, & a = 0, \\ \mp\infty, & -\infty \leq a < 0. \end{cases}$
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0, \quad \forall a \in \mathbf{R}.$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 不被允许

广义实数

定义：广义实数的正部，负部

$a \in \overline{\mathbf{R}}$，记

$$a^+ = \max(a, 0) = a \vee 0; \quad a^- = \max(-a, 0) = (-a) \vee 0.$$

广义实数

定义：广义实数上的 Borel 域

$$\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}}) \overset{\text{def}}{=} \sigma\big(\mathscr{B}(\mathbf{R}), \{\infty\}, \{-\infty\}\big).$$

广义实数

定义： 广义实数上的区间

对于任意的 $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$,

$$(a, b) = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a < x < b\};$$

$$[a, b) = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a \leq x < b\};$$

$$(a, b] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a < x \leq b\};$$

$$[a, b] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} : a \leq x \leq b\}.$$

广义实数

命题： 广义实数上的 Borel 域的表示

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}}) &= \sigma([-\infty, a) : a \in \mathbf{R}) \\
&= \sigma([-\infty, a] : a \in \mathbf{R}) \\
&= \sigma((a, \infty] : a \in \mathbf{R}) \\
&= \sigma([a, \infty] : a \in \mathbf{R})
\end{aligned}
$$

可测函数, 随机变量

定义:

从可测空间 $(X, \mathscr{F})$ 到 $(\overline{\mathbf{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}}))$ 的可测映射称为 $(X, \mathscr{F})$ 上的**可测函数**. 特别地, 从 $(X, \mathscr{F})$ 到 $(\mathbf{R}, \mathscr{B}(\mathbf{R}))$ 的可测映射称为 $(X, \mathscr{F})$ 上的**有限值可测函数**或**随机变量**.

可测函数, 随机变量

定理： 可测函数, 随机变量的判别法

下列说法等价

(1) f 是可测空间 $(X, \mathscr{F})$ 上的可测函数 (或随机变量);

(2) $\{f < a\} \in \mathscr{F}$, $\forall a \in \mathbf{R}$;

(3) $\{f \leq a\} \in \mathscr{F}$, $\forall a \in \mathbf{R}$;

(4) $\{f > a\} \in \mathscr{F}$, $\forall a \in \mathbf{R}$;

(5) $\{f \geq a\} \in \mathscr{F}$, $\forall a \in \mathbf{R}$.

推论:

如果 f, g 是可测函数, 则

$$\{f < g\},\ \{f \leq g\},\ \{f = g\} \in \mathscr{F}.$$

特别地, $\{f = a\} \in \mathscr{F}$, $\forall a \in \overline{\mathbf{R}}$.

Outline

可测函数的运算

定理:

如果 f, g 是可测函数, 则

(1) 对任何 $a \in \overline{\mathbf{R}}$, af 是可测函数;

(2) 若 $f+g$ 有意义, 即 $\forall x \in X$, $f(x)+g(x)$ 均有意义, 则 $f+g$ 是可测函数;

注: 即不出现 $\infty+(-\infty)$ 或 $(-\infty)+\infty$ 的情况.

(3) fg 是可测函数;

(4) 若 $g(x) \neq 0$, 且 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 有意义 $\forall x \in X$, 则 $\frac{f}{g}$ 是可测函数.

注: 即不出现 $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 的情况.

可测函数的运算

定理:

如果 f, g 是可测函数, 则

(1) 对任何 $a \in \overline{\mathbf{R}}$, af 是可测函数;

(2) 若 $f+g$ 有意义, 即 $\forall x \in X$, $f(x)+g(x)$ 均有意义, 则 $f+g$ 是可测函数;

注: 即不出现 $\infty + (-\infty)$ 或 $(-\infty) + \infty$ 的情况.

(3) fg 是可测函数;

(4) 若 $g(x) \neq 0$, 且 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 有意义 $\forall x \in X$, 则 $\frac{f}{g}$ 是可测函数.

注: 即不出现 $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 的情况.

可测函数的运算

定理:

如果 f, g 是可测函数, 则

(1) 对任何 $a \in \overline{\mathbf{R}}$, af 是可测函数;

(2) 若 $f+g$ 有意义, 即 $\forall x \in X$, $f(x)+g(x)$ 均有意义, 则 $f+g$ 是可测函数;

注: 即不出现 $\infty+(-\infty)$ 或 $(-\infty)+\infty$ 的情况.

(3) fg 是可测函数;

(4) 若 $g(x) \neq 0$, 且 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 有意义 $\forall x \in X$, 则 $\frac{f}{g}$ 是可测函数.

注: 即不出现 $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 的情况.

可测函数的运算

定理:

如果 f, g 是可测函数, 则

(1) 对任何 $a \in \overline{\mathbf{R}}$, af 是可测函数;

(2) 若 $f+g$ 有意义, 即 $\forall x \in X$, $f(x)+g(x)$ 均有意义, 则 $f+g$ 是可测函数;

注: 即不出现 $\infty+(-\infty)$ 或 $(-\infty)+\infty$ 的情况.

(3) fg 是可测函数;

(4) 若 $g(x) \neq 0$, 且 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 有意义 $\forall x \in X$, 则 $\frac{f}{g}$ 是可测函数.

注: 即不出现 $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 的情况.

可测函数的极限

定理:

如果 $\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 是可测函数列, 则

$$\inf_n f_n,\ \ \sup_n f_n,\ \ \liminf_{n\to\infty} f_n,\ \ \limsup_{n\to\infty} f_n$$

仍是可测函数.

注记:

p16 定理 1.5.2 证明有错, 修订如下:

$$\{\inf_n f_n \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{f_n \geq a\}.$$

可测函数的极限

定理：

如果 $\{f_n, n=1,2,\cdots\}$ 是可测函数列，则

$$\inf_n f_n,\quad \sup_n f_n,\quad \liminf_{n\to\infty} f_n,\quad \limsup_{n\to\infty} f_n$$

仍是可测函数.

注记：

p16 定理 1.5.2 证明有错，修订如下：

$$\{\inf_n f_n \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{f_n \geq a\}.$$

可测函数的构造

定义： 有限分割，有限可测分割

- 有限个两两不交的集合 $\{A_i \subset X,\ i = 1, \cdots, n\}$ 如果满足 $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$, 就把它称为空间 X 的一个**有限分割**.
- 如对每个 $i = 1, \cdots .n$ 有 $A_i \in \mathscr{F}$, 则 X 的有限分割 $\{A_i, i = 1, \cdots, n\}$ 称为可测空间 $(X, \mathscr{F})$ 的**有限可测分割**

定义： 简单函数

对于可测空间 $(X, \mathscr{F})$ 上的函数 $f: X \to \mathbf{R}$, 如果存在有限可测分割 $\{A_i \in \mathscr{F}, i = 1, \cdots, n\}$ 和实数 $\{a_i, i = 1, \cdots, n\}$ 使

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i},$$

则称之为**简单函数**

可测函数的构造

定义： 有限分割，有限可测分割

- 有限个两两不交的集合 $\{A_i \subset X,\ i = 1, \cdots, n\}$ 如果满足 $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$, 就把它称为空间 X 的一个**有限分割**.
- 如对每个 $i = 1, \cdots .n$ 有 $A_i \in \mathscr{F}$, 则 X 的有限分割 $\{A_i, i = 1, \cdots, n\}$ 称为可测空间 $(X, \mathscr{F})$ 的**有限可测分割**

定义： 简单函数

对于可测空间 $(X, \mathscr{F})$ 上的函数 $f \colon X \to \mathbf{R}$, 如果存在有限可测分割 $\{A_i \in \mathscr{F}, i = 1, \cdots, n\}$ 和实数 $\{a_i, i = 1, \cdots, n\}$ 使

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i},$$

则称之为**简单函数**

可测函数的构造

定义： 有限分割，有限可测分割

- 有限个两两不交的集合 $\{A_i \subset X,\ i = 1, \cdots, n\}$ 如果满足 $\bigcup_{i=1}^n A_i = X$, 就把它称为空间 X 的一个**有限分割**.
- 如对每个 $i = 1, \cdots .n$ 有 $A_i \in \mathscr{F}$, 则 X 的有限分割 $\{A_i, i = 1, \cdots, n\}$ 称为可测空间 $(X, \mathscr{F})$ 的**有限可测分割**

定义： 简单函数

对于可测空间 $(X, \mathscr{F})$ 上的函数 $f: X \to \mathbf{R}$, 如果存在有限可测分割 $\{A_i \in \mathscr{F}, i = 1, \cdots, n\}$ 和实数 $\{a_i, i = 1, \cdots, n\}$ 使

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i},$$

则称之为**简单函数**

可测函数的构造

- 有界: f 可测函数, 如果存在 $0 < M < \infty$ 使得 $|f(x)| < M, \forall x \in X$.
- 正部: $f^+(x) = \max(f(x), 0)$, 负部：$f^-(x) = \max(-f(x), 0)$, $\forall x \in X$.
- 点点收敛：可测函数列 $\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 当 $n \to \infty$ 时点点收敛到可测函数 f，即

$$f_n(x) \to f(x), \forall x \in X.$$

则记为 $f_n \to f$.

可测函数的构造

- 有界: f 可测函数, 如果存在 $0 < M < \infty$ 使得 $|f(x)| < M, \forall x \in X$.
- 正部: $f^+(x) = \max(f(x), 0)$, 负部：$f^-(x) = \max(-f(x), 0)$, $\forall x \in X$.
- 点点收敛：可测函数列 $\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 当 $n \to \infty$ 时点点收敛到可测函数 f，即

$$f_n(x) \to f(x), \forall x \in X.$$

则记为 $f_n \to f$.

可测函数的构造

- 有界: f 可测函数, 如果存在 $0 < M < \infty$ 使得 $|f(x)| < M, \forall x \in X$.
- 正部: $f^+(x) = \max(f(x), 0)$, 负部：$f^-(x) = \max(-f(x), 0)$, $\forall x \in X$.
- 点点收敛：可测函数列 $\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 当 $n \to \infty$ 时点点收敛到可测函数 f，即

$$f_n(x) \to f(x), \forall x \in X.$$

则记为 $f_n \to f$.

可测函数的构造

定理:

下列命题成立:

(1) 对任何**非负**可测函数 f, 存在非负简单函数列 $\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 使 $f_n \uparrow f$;
如果 f 是**非负有界**可测的, 则存在非负简单函数列 $\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 使 $f_n(x) \uparrow f(x)$ 对 $x \in X$ **一致**成立.

(2) 对任何可测函数 f, 存在简单函数列 $\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 使 $f_n \to f$;
如果 f 是**有界**可测的, 则存在简单函数列 $\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 使 $f_n(x) \to f(x)$ 对 $x \in X$ **一致**成立.

可测函数的构造

定理:

设 g 是 $(X, \mathscr{F})$ 到 $(Y, \mathscr{S})$ 的可测映射, 则 h 是 $(X, g^{-1}(\mathscr{S}))$ 上的可测函数 (或随机变量，或有界可测函数) 当且仅当存在 $(Y, \mathscr{S})$ 上的可测函数 (或随机变量，或有界可测函数)f 使得 $h = f \circ g$.

概率论，测度论典型方法

当需要证明 $(X, \mathscr{F})$ 上的可测函数关于某命题成立时，常有以下几个步骤

1. 证明对于 $\forall A \in \mathscr{F}$, $\mathbf{1}_A$ 成立;
2. 证明非负简单函数成立;
3. 证明对非负非降简单函数列的极限成立;
4. 证明对一般可测函数成立.

1.1 设 $\mathscr{A}$ 是域 ($\mathscr{P}$ 是 π 系), 且 $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{A})$(或 $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{P})$). 证明对于任意的 $A \in \mathscr{A}$(或 $A \in \mathscr{P}$), $\mathbf{1}_A$ 关于命题成立.

1.2 证明 $\mathscr{F}$ 中所有使得命题成立的集合系 $\mathscr{S}$ 是单调系 (或 λ 系);

1.3 利用集形式的单调类定理得对于 $\forall A \in \mathscr{F}$, $\mathbf{1}_A$ 成立.

概率论，测度论典型方法

当需要证明 $(X, \mathscr{F})$ 上的可测函数关于某命题成立时，常有以下几个步骤

1. 证明对于 $\forall A \in \mathscr{F}$, $\mathbf{1}_A$ 成立;
2. 证明非负简单函数成立;
3. 证明对非负非降简单函数列的极限成立;
4. 证明对一般可测函数成立.

1.1 设 $\mathscr{A}$ 是域 ($\mathscr{P}$ 是 π 系), 且 $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{A})$(或 $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{P})$). 证明对于任意的 $A \in \mathscr{A}$(或 $A \in \mathscr{P}$), $\mathbf{1}_A$ 关于命题成立.

1.2 证明 $\mathscr{F}$ 中所有使得命题成立的集合系 $\mathscr{S}$ 是单调系 (或 λ 系);

1.3 利用集形式的单调类定理得对于 $\forall A \in \mathscr{F}$, $\mathbf{1}_A$ 成立.

当需要证明 $(X, \mathscr{F})$ 上的可测函数关于某命题成立时，常有以下几个步骤

1. 证明对于 $\forall A \in \mathscr{F}$, $\mathbf{1}_A$ 成立;
2. 证明非负简单函数成立；
3. 证明对非负非降简单函数列的极限成立；
4. 证明对一般可测函数成立.

1.1 设 $\mathscr{A}$ 是域 ($\mathscr{P}$ 是 π 系), 且 $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{A})$(或 $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{P})$). 证明对于任意的 $A \in \mathscr{A}$(或 $A \in \mathscr{P}$), $\mathbf{1}_A$ 关于命题成立.

1.2 证明 $\mathscr{F}$ 中所有使得命题成立的集合系 $\mathscr{S}$ 是单调系 (或 λ 系);

1.3 利用集形式的单调类定理得对于 $\forall A \in \mathscr{F}$, $\mathbf{1}_A$ 成立.

概率论，测度论典型方法

当需要证明 $(X, \mathscr{F})$ 上的可测函数关于某命题成立时，常有以下几个步骤

1. 证明对于 $\forall A \in \mathscr{F}$, $\mathbf{1}_A$ 成立;
2. 证明非负简单函数成立;
3. 证明对非负非降简单函数列的极限成立;
4. 证明对一般可测函数成立.

1.1 设 $\mathscr{A}$ 是域 ($\mathscr{P}$ 是 π 系), 且 $\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{A})$(或 $\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{P})$). 证明对于任意的 $A \in \mathscr{A}$(或 $A \in \mathscr{P}$), $\mathbf{1}_A$ 关于命题成立.

1.2 证明 $\mathscr{F}$ 中所有使得命题成立的集合系 $\mathscr{S}$ 是单调系 (或 λ 系);

1.3 利用集形式的单调类定理得对于 $\forall A \in \mathscr{F}$, $\mathbf{1}_A$ 成立.

当需要证明 $(X, \mathscr{F})$ 上的可测函数关于某命题成立时，常有以下几个步骤

1. 证明对于 $\forall A \in \mathscr{F}$, $\mathbf{1}_A$ 成立;
2. 证明非负简单函数成立;
3. 证明对非负非降简单函数列的极限成立;
4. 证明对一般可测函数成立.

1.1 设 $\mathscr{A}$ 是域 ($\mathscr{P}$ 是 π 系), 且 $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{A})$(或 $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{P})$). 证明对于任意的 $A \in \mathscr{A}$(或 $A \in \mathscr{P}$), $\mathbf{1}_A$ 关于命题成立.

1.2 证明 $\mathscr{F}$ 中所有使得命题成立的集合系 $\mathscr{S}$ 是单调系 (或 λ 系);

1.3 利用集形式的单调类定理得对于 $\forall A \in \mathscr{F}$, $\mathbf{1}_A$ 成立.

概率论，测度论典型方法

当需要证明 $(X, \mathscr{F})$ 上的可测函数关于某命题成立时，常有以下几个步骤

1. 证明对于 $\forall A \in \mathscr{F}$, $\mathbf{1}_A$ 成立;
2. 证明非负简单函数成立;
3. 证明对非负非降简单函数列的极限成立;
4. 证明对一般可测函数成立.

1.1 设 $\mathscr{A}$ 是域 ($\mathscr{P}$ 是 π 系), 且 $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{A})$(或 $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{P})$). 证明对于任意的 $A \in \mathscr{A}$(或 $A \in \mathscr{P}$), $\mathbf{1}_A$ 关于命题成立.

1.2 证明 $\mathscr{F}$ 中所有使得命题成立的集合系 $\mathscr{S}$ 是单调系 (或 λ 系);

1.3 利用集形式的单调类定理得对于 $\forall A \in \mathscr{F}$, $\mathbf{1}_A$ 成立.

当需要证明 $(X, \mathscr{F})$ 上的可测函数关于某命题成立时，常有以下几个步骤

1. 证明对于 $\forall A \in \mathscr{F}$, $\mathbf{1}_A$ 成立;
2. 证明非负简单函数成立；
3. 证明对非负非降简单函数列的极限成立；
4. 证明对一般可测函数成立.

1.1 设 $\mathscr{A}$ 是域 ($\mathscr{P}$ 是 π 系), 且 $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{A})$(或 $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{P})$). 证明对于任意的 $A \in \mathscr{A}$(或 $A \in \mathscr{P}$), $\mathbf{1}_A$ 关于命题成立.

1.2 证明 $\mathscr{F}$ 中所有使得命题成立的集合系 $\mathscr{S}$ 是单调系 (或 λ 系);

1.3 利用集形式的单调类定理得对于 $\forall A \in \mathscr{F}$, $\mathbf{1}_A$ 成立.

当需要证明 $(X, \mathscr{F})$ 上的可测函数关于某命题成立时，常有以下几个步骤

1. 证明对于 $\forall A \in \mathscr{F}$, $\mathbf{1}_A$ 成立;
2. 证明非负简单函数成立；
3. 证明对非负非降简单函数列的极限成立；
4. 证明对一般可测函数成立.

1.1 设 $\mathscr{A}$ 是域 ($\mathscr{P}$ 是 π 系), 且 $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{A})$(或 $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{P})$). 证明对于任意的 $A \in \mathscr{A}$(或 $A \in \mathscr{P}$), $\mathbf{1}_A$ 关于命题成立.

1.2 证明 $\mathscr{F}$ 中所有使得命题成立的集合系 $\mathscr{S}$ 是单调系 (或 λ 系);

1.3 利用集形式的单调类定理得对于 $\forall A \in \mathscr{F}$, $\mathbf{1}_A$ 成立.

定理： 函数形式的单调类定理 I

设 $\mathscr{A}$ 是一个域，$\mathscr{M}$ 是一个由 X 上的非负广义实值函数组成的单调类，即它是 X 上具有下列性质的由非负广义实值函数组成的集合：

(1) 对于任何 $f, g \in \mathscr{M}$ 和实数 $a, b \geq 0$，$af + bg \in \mathscr{M}$；

(2) 对于任何 $\{f_n \in \mathscr{M}, n = 1, 2, \cdots\}$，若 $f_n \uparrow f$，则 $f \in \mathscr{M}$；

(3) $f, g \in \mathscr{M}$，$f \geq g$ 且 $f - g$ 有意义则 $f - g \in \mathscr{M}$.

如果对每个 $A \in \mathscr{A}$ 都有 $\mathbf{1}_A \in \mathscr{M}$，则对一切 $(X, \sigma(\mathscr{A}))$ 上的非负可测函数都属于 $\mathscr{M}$.

定理: 函数形式的单调类定理 II

设 $\mathscr{P}$ 是一个 π 系, $\mathscr{L}$ 是一个由 X 上的非负广义实值函数组成的 λ 类, 即它是 X 上具有下列性质的由非负广义实值函数组成的集合:

(1) $1 \in \mathscr{L}$, 即 $\mathbf{1}_X \in \mathscr{L}$;

(2) $\forall f, g \in \mathscr{L}$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 如果 $\alpha f + \beta g \geq 0$, 则

$$\alpha f + \beta g \in \mathscr{L}.$$

(3) 对于任何 $\{f_n \in \mathscr{M}, n = 1, 2, \cdots\}$, 若 $f_n \uparrow f$, 则 $f \in \mathscr{L}$.

如果对每个 $A \in \mathscr{P}$ 都有 $\mathbf{1}_A \in \mathscr{L}$, 则对一切 $(X, \sigma(\mathscr{P}))$ 上的非负可测函数都属于 $\mathscr{L}$.

Outline

测度空间：测度的定义及性质

定义： 非负集函数函数

给定空间 X 上的集合系 $\mathscr{E}$. 定义在 $\mathscr{E}$ 上, 取值于 $[0,\infty]$ 的函数称为**非负集函数**.

定义： 可列可加性

设 μ 是 $\mathscr{E}$ 上的非负集函数. 如果对任意可列个两两不交的集合 $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{E}$, 只要 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{E}$，就一定有

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

则称 μ 具有可列可加性.

测度的定义及性质

定义： 测度

设 $\mathscr{E}$ 是 X 上的集合系且$\emptyset \in \mathscr{E}$, 若 $\mathscr{E}$ 上的非负集函数 μ 有可列可加性且$\mu(\emptyset) = 0$, 则称之为 $\mathscr{E}$ 上的**测度**.

- 若 $\forall A \in \mathscr{E}$, $\mu(A) < \infty$，则称测度 μ 是**有限的**.
- 若 $A \in \mathscr{E}$, 存在满足 $\mu(A_n) < \infty$ 的 $\{A_n \in \mathscr{E}, \ n = 1, 2, \cdots\}$ 使得 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A$, 则称测度 μ 是σ **有限的**.

测度的定义及性质

定义： 有限可加性

若 $\mathscr{E}$ 中任意有限个两两不交且 $\bigcup_{i=1}^{n} A_n \in \mathscr{E}$ 的集合 $A_1, \cdots, A_n$ 均有

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i),$$

则称非负集函数 μ 具有有限可加性.

定义： 可减性

若 $A, B \in \mathscr{E}$, $A \subset B$, $B \setminus A \in \mathscr{E}$, 只要 $\mu(A) < \infty$ 就有

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A),$$

则称 μ 有可减性.

命题

测度具有有限可加性和可减性.

测度空间

定义： 测度空间

设 $(X, \mathscr{F})$ 是可测空间, μ 是定义于 σ 域 $\mathscr{F}$ 上的测度, 则称三元组 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 为**测度空间**.

(1) 若 $\mu(X) < \infty$, 则称 μ 为**有限测度**, 称 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 为**有限测度空间**.

(2) 若 $\mu(X) = 1$, 则称 μ 为**概率测度**, 称 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 为**概率测度空间或概率空间**.

(3) 若存在 $A_n \in \mathscr{F}, n \geq 1$, 使得 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$, 且使 $\mu(A_n) < \infty$ 对一切 $n \geq 1$ 成立, 则称 μ 为**σ 有限测度**, 称 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 为**σ 有限测度空间**.

测度空间

定义： 测度空间

设 $(X, \mathscr{F})$ 是可测空间, μ 是定义于 σ 域 $\mathscr{F}$ 上的测度, 则称三元组 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 为**测度空间**.

(1) 若 $\mu(X) < \infty$, 则称 μ 为**有限测度**, 称 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 为**有限测度空间**.

(2) 若 $\mu(X) = 1$, 则称 μ 为**概率测度**, 称 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 为**概率测度空间或概率空间**.

(3) 若存在 $A_n \in \mathscr{F}, n \geq 1$, 使得 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$, 且使 $\mu(A_n) < \infty$ 对一切 $n \geq 1$ 成立, 则称 μ 为**σ 有限测度**, 称 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 为**σ 有限测度空间**.

测度空间

定义： 测度空间

设 $(X, \mathscr{F})$ 是可测空间, μ 是定义于 σ 域 $\mathscr{F}$ 上的测度, 则称三元组 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 为**测度空间**.

(1) 若 $\mu(X) < \infty$, 则称 μ 为**有限测度**, 称 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 为**有限测度空间**.

(2) 若 $\mu(X) = 1$, 则称 μ 为**概率测度**, 称 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 为**概率测度空间或概率空间**.

(3) 若存在 $A_n \in \mathscr{F}, n \geq 1$, 使得 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$, 且使 $\mu(A_n) < \infty$ 对一切 $n \geq 1$ 成立, 则称 μ 为σ 有限测度, 称 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 为σ 有限测度空间.

测度空间

定义： 测度空间

设 $(X, \mathscr{F})$ 是可测空间, μ 是定义于 σ 域 $\mathscr{F}$ 上的测度, 则称三元组 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 为**测度空间**.

(1) 若 $\mu(X) < \infty$, 则称 μ 为**有限测度**, 称 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 为**有限测度空间**.

(2) 若 $\mu(X) = 1$, 则称 μ 为**概率测度**, 称 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 为**概率测度空间**或**概率空间**.

(3) 若存在 $A_n \in \mathscr{F}, n \geq 1$, 使得 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$, 且使 $\mu(A_n) < \infty$ 对一切 $n \geq 1$ 成立, 则称 μ 为σ **有限测度**, 称 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 为σ **有限测度空间**.

测度空间

1. $(X, \mathscr{F}, \mu)$, 若 $N \in \mathscr{F}$, $\mu(N) = 0$, 则称 N 为 μ **零测集**.
2. $(X, \mathscr{F}, P)$ 概率空间, $\mathscr{F}$ 中的集合又称为**事件**, $P(A)$ 又称为事件 A 发生的概率.

测度空间

1. $(X, \mathscr{F}, \mu)$, 若 $N \in \mathscr{F}$, $\mu(N) = 0$, 则称 N 为 μ **零测集**.
2. $(X, \mathscr{F}, P)$ 概率空间, $\mathscr{F}$ 中的集合又称为**事件**, $P(A)$ 又称为**事件 A 发生的概率**.

回忆 Lebesgue 测度的建立

(1) $\mathscr{D} = \{(a,b], a, b \in \mathbf{R}\}$, $m((a,b]) = b - a$.
$\mathscr{D}' = \{(a,b), a, b \in \mathbf{R}\}$.

(2) 外测度: $E \subset \mathbf{R}$

$$m^*(E) = \inf\{\sum_{k\geq 1} m((a_k, b_k)), (a_k, b_k) \in \mathscr{D}', E \subset \bigcup_{k\geq 1}(a_k, b_k)\}.$$

(3) Caratheodory 条件 (定理) $E \subset \mathbf{R}$, 对于任意 $T \subset \mathbf{R}$, 若 E 满足

$$m^*(T) = m^*(T \bigcap E) + m^*(T \bigcap E^c)$$

则称 E 满足 Caratheodory 条件.

$$\mathscr{L} = \{E \subset \mathbf{R} : \ E \ \text{满足 Caratheodory 条件}\},$$

则 $\mathscr{L}$ 为 σ 域, 即 Lebesgue 可测集，m^* 限制在 $\mathscr{L}$ 上为一个测度.

回忆 Lebesgue 测度的建立

(1) $\mathscr{D} = \{(a, b], a, b \in \mathbf{R}\}$, $m((a, b]) = b - a$.
$\mathscr{D}' = \{(a, b), a, b \in \mathbf{R}\}$.

(2) 外测度: $E \subset \mathbf{R}$

$$m^*(E) = \inf\{\sum_{k\geq 1} m((a_k, b_k)), (a_k, b_k) \in \mathscr{D}', E \subset \bigcup_{k\geq 1}(a_k, b_k)\}.$$

(3) Caratheodory 条件 (定理) $E \subset \mathbf{R}$, 对于任意 $T \subset \mathbf{R}$, 若 E 满足

$$m^*(T) = m^*(T \bigcap E) + m^*(T \bigcap E^c)$$

则称 E 满足 Caratheodory 条件.

$$\mathscr{L} = \{E \subset \mathbf{R} : \ E \ \text{满足 Caratheodory 条件}\},$$

则 $\mathscr{L}$ 为 σ 域, 即 Lebesgue 可测集, m^* 限制在 $\mathscr{L}$ 上为一个测度.

回忆 Lebesgue 测度的建立

(1) $\mathscr{D} = \{(a,b], a, b \in \mathbf{R}\}$, $m((a,b]) = b - a$.
$\mathscr{D}' = \{(a,b), a, b \in \mathbf{R}\}$.

(2) 外测度: $E \subset \mathbf{R}$

$$m^*(E) = \inf\{\sum_{k\geq 1} m((a_k,b_k)), (a_k,b_k) \in \mathscr{D}', E \subset \bigcup_{k\geq 1}(a_k,b_k)\}.$$

(3) Caratheodory 条件 (定理) $E \subset \mathbf{R}$, 对于任意 $T \subset \mathbf{R}$, 若 E 满足

$$m^*(T) = m^*(T \bigcap E) + m^*(T \bigcap E^c)$$

则称 E 满足 Caratheodory 条件.

$$\mathscr{L} = \{E \subset \mathbf{R} : \ E \ \text{满足 Caratheodory 条件}\},$$

则 $\mathscr{L}$ 为 σ 域, 即 Lebesgue 可测集, m^* 限制在 $\mathscr{L}$ 上为一个测度.

Outline

抽象测度建立的“程序”

1. $\mathscr{D}$ 半环. why?
2. μ 为 $\mathscr{D}$ 上的一个测度.
3. 由 μ 生成的外测度 μ^*. (非负，单调，半可列可加性)
4. Caratheodory 定理
   (1) $\mathscr{U} = \{A \subset X:\ A$ 满足 Caratheodory 条件$\}$, $\mathscr{U}$ 为 σ 域;
   (2) $\mathscr{D} \subset \mathscr{U}$;
   (3) $\sigma(\mathscr{D}) \subset \mathscr{U}$,
      1. $\sigma(\mathscr{D})\Big|_{\mu^*}$ 是测度;
      2. $\mathscr{U}\Big|_{\mu^*}$ 是测度.
      3. 两者之间的关系?
   (4) 唯一性.

抽象测度建立的“程序”

1. $\mathscr{D}$ 半环. why?
2. μ 为 $\mathscr{D}$ 上的一个测度.
3. 由 μ 生成的外测度 μ^*. (非负，单调，半可列可加性)
4. Caratheodory 定理

   (1) $\mathscr{U}=\{A\subset X:\ A$ 满足 Caratheodory 条件$\}$, $\mathscr{U}$ 为 σ 域;

   (2) $\mathscr{D}\subset\mathscr{U}$;

   (3) $\sigma(\mathscr{D})\subset\mathscr{U}$,

      1. $\sigma(\mathscr{D})\Big|_{\mu^*}$ 是测度;
      2. $\mathscr{U}\Big|_{\mu^*}$ 是测度.
      3. 两者之间的关系?

   (4) 唯一性.

抽象测度建立的“程序”

1. $\mathscr{D}$ 半环. why?
2. μ 为 $\mathscr{D}$ 上的一个测度.
3. 由 μ 生成的外测度 μ^*. (非负，单调，半可列可加性)
4. Caratheodory 定理
   (1) $\mathscr{U}=\{A\subset X:\ A$ 满足 Caratheodory 条件$\}$, $\mathscr{U}$ 为 σ 域;
   (2) $\mathscr{D}\subset\mathscr{U}$;
   (3) $\sigma(\mathscr{D})\subset\mathscr{U}$,
      1. $\sigma(\mathscr{D})\Big|_{\mu^*}$ 是测度;
      2. $\mathscr{U}\Big|_{\mu^*}$ 是测度.
      3. 两者之间的关系?
   (4) 唯一性.

抽象测度建立的“程序”

1. $\mathscr{D}$ 半环. why?
2. μ 为 $\mathscr{D}$ 上的一个测度.
3. 由 μ 生成的外测度 μ^*. (非负，单调，半可列可加性)
4. Caratheodory 定理
   (1) $\mathscr{U} = \{A \subset X: A$ 满足 Caratheodory 条件$\}$, $\mathscr{U}$ 为 σ 域;
   (2) $\mathscr{D} \subset \mathscr{U}$;
   (3) $\sigma(\mathscr{D}) \subset \mathscr{U}$,
      1. $\sigma(\mathscr{D})\Big|_{\mu^*}$ 是测度;
      2. $\mathscr{U}\Big|_{\mu^*}$ 是测度.
      3. 两者之间的关系?
   (4) 唯一性.

抽象测度建立的“程序”

1. $\mathscr{D}$ 半环. why?
2. μ 为 $\mathscr{D}$ 上的一个测度.
3. 由 μ 生成的外测度 μ^*. (非负，单调，半可列可加性)
4. Caratheodory 定理
   (1) $\mathscr{U} = \{A \subset X:\ A$ 满足 Caratheodory 条件$\}$, $\mathscr{U}$ 为 σ 域;
   (2) $\mathscr{D} \subset \mathscr{U}$;
   (3) $\sigma(\mathscr{D}) \subset \mathscr{U}$,
      1. $\sigma(\mathscr{D})\Big|_{\mu^*}$ 是测度;
      2. $\mathscr{U}\Big|_{\mu^*}$ 是测度.
      3. 两者之间的关系?

   (4) 唯一性.

抽象测度建立的“程序”

1. $\mathscr{D}$ 半环. why?
2. μ 为 $\mathscr{D}$ 上的一个测度.
3. 由 μ 生成的外测度 μ^*. (非负，单调，半可列可加性)
4. Caratheodory 定理
   (1) $\mathscr{U} = \{A \subset X : A$ 满足 Caratheodory 条件$\}$, $\mathscr{U}$ 为 σ 域;
   (2) $\mathscr{D} \subset \mathscr{U}$;
   (3) $\sigma(\mathscr{D}) \subset \mathscr{U}$,
      1. $\sigma(\mathscr{D})\Big|_{\mu^*}$ 是测度;
      2. $\mathscr{U}\Big|_{\mu^*}$ 是测度.
      3. 两者之间的关系?
   (4) 唯一性.

抽象测度建立的“程序”

1. $\mathscr{D}$ 半环. why?
2. μ 为 $\mathscr{D}$ 上的一个测度.
3. 由 μ 生成的外测度 μ^*. (非负，单调，半可列可加性)
4. Caratheodory 定理

   (1) $\mathscr{U} = \{A \subset X: A$ 满足 Caratheodory 条件$\}$, $\mathscr{U}$ 为 σ 域;
   (2) $\mathscr{D} \subset \mathscr{U}$;
   (3) $\sigma(\mathscr{D}) \subset \mathscr{U}$,

      1. $\sigma(\mathscr{D})\Big|_{\mu^*}$ 是测度;
      2. $\mathscr{U}\Big|_{\mu^*}$ 是测度.
      3. 两者之间的关系?

   (4) 唯一性.

抽象测度建立的“程序”

1. $\mathscr{D}$ 半环. why?
2. μ 为 $\mathscr{D}$ 上的一个测度.
3. 由 μ 生成的外测度 μ^*. (非负，单调，半可列可加性)
4. Caratheodory 定理
   (1) $\mathscr{U} = \{A \subset X: A$ 满足 Caratheodory 条件$\}$, $\mathscr{U}$ 为 σ 域;
   (2) $\mathscr{D} \subset \mathscr{U}$;
   (3) $\sigma(\mathscr{D}) \subset \mathscr{U}$,
      1. $\sigma(\mathscr{D})\Big|_{\mu^*}$ 是测度;
      2. $\mathscr{U}\Big|_{\mu^*}$ 是测度.
      3. 两者之间的关系?
   (4) 唯一性.

非负集函数的一些术语

设 μ 为 $\mathscr{E}$ 上的非负集函数

定义： 单调性

$A, B \in \mathscr{E}$, 且 $A \subset B$, 则 $\mu(A) \leq \mu(B)$.

定义： 有限可加性

$A_i \in \mathscr{E}, 1 \leq i \leq n$ 两两不交, $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathscr{E}$, 则

$$\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

非负集函数的一些术语

设 μ 为 $\mathscr{E}$ 上的非负集函数

定义： 单调性

$A, B \in \mathscr{E}$, 且 $A \subset B$, 则 $\mu(A) \leq \mu(B)$.

定义： 有限可加性

$A_i \in \mathscr{E}, 1 \leq i \leq n$ 两两不交, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{E}$, 则

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

非负集函数的一些术语

定义： σ 可加性, 可列可加性

$A_i \in \mathscr{E}, i \geq 1$ 两两不交, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{E}$, 则

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

定义： 半 σ 可加性, 半可列可加性

$A_i \in \mathscr{E}, i \geq 1, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{E}$,

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

非负集函数的一些术语

定义： σ 可加性, 可列可加性

$A_i \in \mathscr{E}, i \geq 1$ 两两不交, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{E}$, 则

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

定义： 半 σ 可加性, 半可列可加性

$A_i \in \mathscr{E}, i \geq 1$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{E}$,

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

非负集函数的一些术语

定义： μ 从下连续性

$A_n \in \mathscr{E}, n \geq 1$, $A_n \uparrow A \in \mathscr{E}$, 则若

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

定义： μ 从上连续性

若 $A_n \in \mathscr{E}, n \geq 1$, $A_n \downarrow A \in \mathscr{E}$, 且 $\mu(A_1) < \infty$, 则

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

定义： μ 在空集处连续

若 $A_n \in \mathscr{E}, n \geq 1$, $A_n \downarrow \emptyset$, 且 $\mu(A_1) < \infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$$

非负集函数的一些术语

定义： μ 从下连续性

$A_n \in \mathscr{E}, n \geq 1$, $A_n \uparrow A \in \mathscr{E}$, 则若

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

定义： μ 从上连续性

若 $A_n \in \mathscr{E}, n \geq 1$, $A_n \downarrow A \in \mathscr{E}$, 且 $\mu(A_1) < \infty$, 则

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

定义： μ 在空集处连续

若 $A_n \in \mathscr{E}, n \geq 1$, $A_n \downarrow \emptyset$, 且 $\mu(A_1) < \infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$$

非负集函数的一些术语

定义： μ 从下连续性

$A_n \in \mathscr{E}, n \geq 1$, $A_n \uparrow A \in \mathscr{E}$, 则若

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

定义： μ 从上连续性

若 $A_n \in \mathscr{E}, n \geq 1$, $A_n \downarrow A \in \mathscr{E}$, 且 $\mu(A_1) < \infty$, 则

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

定义： μ 在空集处连续

若 $A_n \in \mathscr{E}, n \geq 1$, $A_n \downarrow \emptyset$, 且 $\mu(A_1) < \infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$$

测度的性质

定理： P31, 定理 2.1.5

半环上的测度具有单调性，可减性, 半可列可加性, 从上连续性, 从下连续性.

定理： 《测度论讲义》第二版, P17 命题 1.4.4

设 μ 为半环 $\mathscr{E}$ 上的一非负集函数 (约定 $\mu(\emptyset)=0$) , 则要 μ 是 σ 可加的必需且只需 μ 为有限可加且半 σ 可加的.

测度的性质

定理： P31, 定理 2.1.5

半环上的测度具有单调性，可减性, 半可列可加性, 从上连续性, 从下连续性.

定理： 《测度论讲义》第二版, P17 命题 1.4.4

设 μ 为半环 $\mathscr{E}$ 上的一非负集函数 (约定 $\mu(\emptyset)=0$) , 则要 μ 是 σ 可加的必需且只需 μ 为有限可加且半 σ 可加的.

命题： P28, 2.1.3

半环 $\mathscr{D}$ 上的有限可加的非负集函数 μ 必有单调性和可减性.

命题： P28, 2.1.4

半环 $\mathscr{D}$ 上的可列可加的非负集函数 μ 具有半可列可加性, 从上连续性和从下连续性.

测度的性质

命题： P28, 2.1.3

半环 $\mathscr{D}$ 上的有限可加的非负集函数 μ 必有单调性和可减性.

命题： P28, 2.1.4

半环 $\mathscr{D}$ 上的可列可加的非负集函数 μ 具有半可列可加性, 从上连续性和从下连续性.

测度的性质

定理： P31, 2.1.6 或《测度论讲义》第二版, P13 定理 1.3.4

设 $\mathscr{E}$ 为域, μ 为 $\mathscr{E}$ 上的一有限可加非负集函数 ($\mu(\emptyset) = 0$), 则 μ 有单调性及可减性，此外

$$
\begin{aligned}
& \mu\text{为可列可加} \\
\Leftrightarrow \quad & \mu \text{ 从下连续} \\
\Rightarrow \quad & \mu \text{ 从上连续} \\
\Rightarrow \quad & \mu \text{ 在 } \emptyset \text{ 处连续.}
\end{aligned}
$$

若进一步

$$\mu(X) < \infty,$$

则上述条件等价.

外测度

定义： 外测度

由 X 的所有子集组成的集合系 $\mathscr{T}$ 到 $\overline{\mathbf{R}}$ 的函数 τ 称为 X 上的外测度，若

(1) $\tau(\emptyset) = 0$;

(2) $A \subset B \subset X$, 则 $\tau(A) \le \tau(B)$;

(3) $\{A_n \in \mathscr{T}, n = 1, 2, \cdots\}$ 有 $\tau(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \tau(A_n)$.

外测度

定理： 由 μ 生成的外测度

设 $\mathscr{E}$ 是一个集合系且 $\emptyset \in \mathscr{E}$. 如果 $\mathscr{E}$ 上的非负集函数 μ 满足 $\mu(\emptyset) = 0$, 对每个 $A \in \mathscr{T}$, 令

$$\tau(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) : B_n \in \mathscr{E}, n \geq 1; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A\}.$$

则 τ 是一个外测度, 称为**由 μ 生成的外测度**.

Caratheodory 定理

设 τ 为 X 上的外测度：

Caratheodory 条件

称 $A \subset X$ 满足 Caratheodory 条件，如果对于 $\forall D \in \mathscr{T}$,

$$\tau(D) = \tau(D \bigcap A) + \tau(D \bigcap A^c).$$

A 称为 τ **可测集**.

$$\mathscr{F}_\tau = \{A \subset X : A \text{ 满足 Caratheodory 条件}\}.$$

定义： 测度空间的完备性（完全性）

如果 μ 的任一零测集的子集还属于 $\mathscr{F}$, 即

$$A \in \mathscr{F}, \mu(A) = 0 \Longrightarrow B \in \mathscr{F}, \forall B \subset A,$$

则称测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是**完备性 (完全性)**.

定理： CARATHEODORY 定理

如果 τ 是外测度, 则 $\mathscr{F}_\tau$ 是一个 σ 域, $(X, \mathscr{F}_\tau, \tau)$ 是一个完备的测度空间.

Caratheodory 定理

定义： 测度空间的完备性（完全性）

如果 μ 的任一零测集的子集还属于 $\mathscr{F}$, 即

$$A \in \mathscr{F}, \mu(A) = 0 \Longrightarrow B \in \mathscr{F}, \forall B \subset A,$$

则称测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是**完备性 (完全性)**.

定理： Caratheodory 定理

如果 τ 是外测度, 则 $\mathscr{F}_\tau$ 是一个 σ 域, $(X, \mathscr{F}_\tau, \tau)$ 是一个完备的测度空间.

Outline

Caratheodory 定理的证明

1. $\mathscr{F}_\tau$ 是 σ 域;
2. τ 限制在 $\mathscr{F}_\tau$ 上是测度;
3. 完备性 (完全性).

1. $\mathscr{F}_\tau$ 是 σ 域;

1.1 $\mathscr{F}_\tau$ 是域;

1.1.1 $\mathscr{F}_\tau$ 非空. 事实上, 只需要证明 $\emptyset \in \mathscr{F}_\tau$.

$$\tau(D) = \tau(D\bigcap\emptyset) + \tau(D\bigcap X), \forall D \subset X.$$

1.1.2 $\mathscr{F}_\tau$ 对取 "余" 运算封闭, 即 $A \in \mathscr{F}_\tau \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}_\tau$.

$$\tau(D) = \tau(D\bigcap A) + \tau(D\bigcap A^c), \forall D \subset X.$$

1.1.3 "有限交" 运算封闭.

1.2 "可列并" 运算封闭.

CARATHEODORY 定理的证明

1. $\mathscr{F}_\tau$ 是 σ 域;

1.1 $\mathscr{F}_\tau$ 是域;

1.1.1 $\mathscr{F}_\tau$ 非空. 事实上, 只需要证明 $\emptyset \in \mathscr{F}_\tau$.

$$\tau(D) = \tau(D \bigcap \emptyset) + \tau(D \bigcap X), \forall D \subset X.$$

1.1.2 $\mathscr{F}_\tau$ 对取 "余" 运算封闭, 即 $A \in \mathscr{F}_\tau \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}_\tau$.

$$\tau(D) = \tau(D \bigcap A) + \tau(D \bigcap A^c), \forall D \subset X.$$

1.1.3 "有限交" 运算封闭.

1.2 "可列并" 运算封闭.

1. $\mathscr{F}_\tau$ 是 σ 域;

1.1 $\mathscr{F}_\tau$ 是域;

1.1.1 $\mathscr{F}_\tau$ 非空. 事实上, 只需要证明 $\emptyset \in \mathscr{F}_\tau$.

$$\tau(D) = \tau(D \bigcap \emptyset) + \tau(D \bigcap X), \forall D \subset X.$$

1.1.2 $\mathscr{F}_\tau$ 对取 "余" 运算封闭, 即 $A \in \mathscr{F}_\tau \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}_\tau$.

$$\tau(D) = \tau(D \bigcap A) + \tau(D \bigcap A^c), \forall D \subset X.$$

1.1.3 "有限交" 运算封闭.

1.2 "可列并" 运算封闭.

1. $\mathscr{F}_\tau$ 是 σ 域;

1.1 $\mathscr{F}_\tau$ 是域;

1.1.1 $\mathscr{F}_\tau$ 非空. 事实上, 只需要证明 $\emptyset \in \mathscr{F}_\tau$.

$$\tau(D) = \tau(D \bigcap \emptyset) + \tau(D \bigcap X), \forall D \subset X.$$

1.1.2 $\mathscr{F}_\tau$ 对取 "余" 运算封闭, 即 $A \in \mathscr{F}_\tau \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}_\tau$.

$$\tau(D) = \tau(D \bigcap A) + \tau(D \bigcap A^c), \forall D \subset X.$$

1.1.3 "有限交" 运算封闭.

1.2 "可列并" 运算封闭.

1. $\mathscr{F}_\tau$ 是 σ 域;

1.1 $\mathscr{F}_\tau$ 是域;

1.1.1 $\mathscr{F}_\tau$ 非空. 事实上, 只需要证明 $\emptyset \in \mathscr{F}_\tau$.

$$\tau(D) = \tau(D \bigcap \emptyset) + \tau(D \bigcap X), \forall D \subset X.$$

1.1.2 $\mathscr{F}_\tau$ 对取 “余” 运算封闭, 即 $A \in \mathscr{F}_\tau \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}_\tau$.

$$\tau(D) = \tau(D \bigcap A) + \tau(D \bigcap A^c), \forall D \subset X.$$

1.1.3 “有限交” 运算封闭.

1.2 “可列并” 运算封闭.

1. $\mathscr{F}_\tau$ 是 σ 域;

1.1 $\mathscr{F}_\tau$ 是域;

1.1.1 $\mathscr{F}_\tau$ 非空. 事实上, 只需要证明 $\emptyset \in \mathscr{F}_\tau$.

$$\tau(D) = \tau(D \bigcap \emptyset) + \tau(D \bigcap X), \forall D \subset X.$$

1.1.2 $\mathscr{F}_\tau$ 对取 "余" 运算封闭, 即 $A \in \mathscr{F}_\tau \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}_\tau$.

$$\tau(D) = \tau(D \bigcap A) + \tau(D \bigcap A^c), \forall D \subset X.$$

1.1.3 "有限交" 运算封闭.

1.2 "可列并" 运算封闭.

1. $\mathscr{F}_\tau$ 是 σ 域;

1.1 $\mathscr{F}_\tau$ 是域;

1.1.1 $\mathscr{F}_\tau$ 非空. 事实上, 只需要证明 $\emptyset \in \mathscr{F}_\tau$.

$$\tau(D) = \tau(D \bigcap \emptyset) + \tau(D \bigcap X), \forall D \subset X.$$

1.1.2 $\mathscr{F}_\tau$ 对取 "余" 运算封闭, 即 $A \in \mathscr{F}_\tau \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}_\tau$.

$$\tau(D) = \tau(D \bigcap A) + \tau(D \bigcap A^c), \forall D \subset X.$$

1.1.3 "有限交" 运算封闭.

1.2 "可列并" 运算封闭.

1.2 "可列并 (或可列交)" 运算封闭.

首次进入分解转换成两两不交并. Key Point: $\mathscr{F}_\tau$ 是域.

$$\tau(D)=\sum_{i=1}^{\infty}\tau(D\bigcap B_i)+\tau(D\bigcap\left(\sum_{i=1}^{\infty}B_i\right)^c).$$

$$\begin{aligned}\tau(D) &\geq \sum_{i=1}^{\infty}\tau(D\bigcap B_i)+\tau(D\bigcap\left(\sum_{i=1}^{\infty}B_i\right)^c)\\ &\geq \tau(D\bigcap\sum_{i=1}^{\infty}B_i)+\tau(D\bigcap\left(\sum_{i=1}^{\infty}B_i\right)^c)\\ &\geq \tau(D).\end{aligned}$$

1.2 “可列并 (或可列交)” 运算封闭.

首次进入分解转换成两两不交并. Key Point: $\mathscr{F}_\tau$ 是域.

$$\tau(D)=\sum_{i=1}^{\infty}\tau(D\bigcap B_i)+\tau\left(D\bigcap\left(\sum_{i=1}^{\infty}B_i\right)^c\right).$$

$$\begin{aligned}\tau(D) &\geq \sum_{i=1}^{\infty}\tau(D\bigcap B_i)+\tau\left(D\bigcap\left(\sum_{i=1}^{\infty}B_i\right)^c\right)\\ &\geq \tau(D\bigcap\sum_{i=1}^{\infty}B_i)+\tau\left(D\bigcap\left(\sum_{i=1}^{\infty}B_i\right)^c\right)\\ &\geq \tau(D).\end{aligned}$$

1.2 “可列并 (或可列交)” 运算封闭.

首次进入分解转换成两两不交并. Key Point: $\mathscr{F}_\tau$ 是域.

$$\tau(D) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau(D \bigcap B_i) + \tau\Big(D \bigcap \Big(\sum_{i=1}^{\infty} B_i\Big)^c\Big).$$

$$\begin{aligned}
\tau(D) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(D \bigcap B_i) + \tau\Big(D \bigcap \Big(\sum_{i=1}^{\infty} B_i\Big)^c\Big) \\
&\geq \tau\Big(D \bigcap \sum_{i=1}^{\infty} B_i\Big) + \tau\Big(D \bigcap \Big(\sum_{i=1}^{\infty} B_i\Big)^c\Big) \\
&\geq \tau(D).
\end{aligned}$$

1.2 “可列并 (或可列交)” 运算封闭.

首次进入分解转换成两两不交并. Key Point: $\mathscr{F}_\tau$ 是域.

$$\tau(D)=\sum_{i=1}^{\infty}\tau(D\bigcap B_i)+\tau\left(D\bigcap\left(\sum_{i=1}^{\infty}B_i\right)^c\right).$$

$$\begin{aligned}\tau(D) &\geq \sum_{i=1}^{\infty}\tau(D\bigcap B_i)+\tau\left(D\bigcap\left(\sum_{i=1}^{\infty}B_i\right)^c\right)\\ &\geq \tau\left(D\bigcap\sum_{i=1}^{\infty}B_i\right)+\tau\left(D\bigcap\left(\sum_{i=1}^{\infty}B_i\right)^c\right)\\ &\geq \tau(D).\end{aligned}$$

Caratheodory 定理的证明

1.2.1 $\{B_i \in \mathscr{F}_\tau, i=1,\cdots,n\}$ 两两不交, $D \in \mathscr{T}$,

$$\tau(D\bigcap\sum_{i=1}^{n}B_i)=\sum_{i=1}^{n}\tau(D\bigcap B_i).$$

1.2.2 $\{B_i \in \mathscr{F}_\tau, i=1,2,\cdots\}$ 两两不交, $D \in \mathscr{T}$,

$$\tau(D)\geq\sum_{i=1}^{\infty}\tau(D\bigcap B_i)+\tau(D\bigcap\Big(\sum_{i=1}^{\infty}B_i\Big)^c).$$

2. τ 限制在 $\mathscr{F}_\tau$ 上是测度: 在下式中取 $D=\sum_{i=1}^{\infty} B_i$

$$\tau(D)=\sum_{i=1}^{\infty}\tau(D\bigcap B_i)+\tau\Big(D\bigcap\Big(\sum_{i=1}^{\infty}B_i\Big)^c\Big).$$

3. 完备性: 即证 $\tau(A)=0\Rightarrow A\in\mathscr{F}_\tau$ 即可.

2. τ 限制在 $\mathscr{F}_\tau$ 上是测度: 在下式中取 $D=\sum_{i=1}^{\infty} B_i$

$$\tau(D)=\sum_{i=1}^{\infty}\tau(D\bigcap B_i)+\tau(D\bigcap\left(\sum_{i=1}^{\infty}B_i\right)^c).$$

3. 完备性: 即证 $\tau(A)=0\Rightarrow A\in\mathscr{F}_\tau$ 即可.

测度的扩张

定义： 测度的扩张

设 μ 和 τ 分别是集合系 $\mathscr{E}$ 和 $\overline{\mathscr{E}}$ 上的测度, 且 $\mathscr{E} \subset \overline{\mathscr{E}}$. 如果 $\forall A \in \mathscr{E}$ 均有

$$\mu(A) = \tau(A),$$

则称 τ 是 μ 在 $\overline{\mathscr{E}}$ 上的**扩张** .
如果 $\overline{\mathscr{E}}$ 上还有一个测度 τ' 使得对每个 $A \in \mathscr{E}$,

$$\mu(A) = \tau'(A)$$

也成立, 就必须有 $\tau' = \tau$, 即 $\tau'(A) = \tau(A), \forall A \in \mathscr{E}$, 则称扩张是**惟一的**.

命题:

设 $\mathscr{P}$ 是一个 π 系, 如果 $\sigma(\mathscr{P})$ 上的测度 μ,ν 满足

(1) 对每个 $A\in\mathscr{P}$ 有 $\mu(A)=\nu(A)$;

(2) ♠ 存在两两不交的 $\{A_n\in\mathscr{P}, n=1,2,\cdots\}$ 使得 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=X$ 且 $\mu(A_n)<\infty$ 对每个 $n=1,2,\cdots$ 成立,

则对任何 $A\in\sigma(P)$ 有

$$\mu(A)=\nu(A).$$

测度的扩张

测度扩张定理

对于半环 $\mathscr{D}$ 上的测度 μ, 存在 $\sigma(\mathscr{D})$ 上的测度 τ 使得对 $\forall A \in \mathscr{D}$ 有

$$\tau(A) = \mu(A);$$

如果条件 ♠ 中的 $\mathscr{P}$ 换成 $\mathscr{D}$ 后成立, 则满足上式的 τ 惟一.

测度扩张定理的证明

Key Points:

1. τ 为 μ 生成的外测度, 应用 Caratheodory 定理;
2. $\tau\Big|_{\mathscr{D}} = \mu$, 即 $\tau(A) = \mu(A)$, $\forall A \in \mathscr{D}$;
3. $\mathscr{D} \subset \mathscr{F}_\tau$.

   3.1 对任意的 $A, D \in \mathscr{D}$ 有

$$\tau(D) \geq \tau(D \cap A) + \tau(D \cap A^c)$$

   3.2 对任意的 $D \in \mathscr{D}$ 和 $D \in \mathscr{T}$

$$\tau(D) \geq \tau(D \cap A) + \tau(D \cap A^c)$$

测度扩张定理的证明

Key Points:

1. τ 为 μ 生成的外测度, 应用 Caratheodory 定理;
2. $\tau\Big|_{\mathscr{D}} = \mu$, 即 $\tau(A) = \mu(A)$, $\forall A \in \mathscr{D}$;
3. $\mathscr{D} \subset \mathscr{F}_\tau$.

   3.1 对任意的 $A, D \in \mathscr{D}$ 有

$$\tau(D) \geq \tau(D \cap A) + \tau(D \cap A^c)$$

   3.2 对任意的 $D \in \mathscr{D}$ 和 $D \in \mathscr{T}$

$$\tau(D) \geq \tau(D \cap A) + \tau(D \cap A^c)$$

测度扩张定理的推论

推论：

设 $\mathscr{D}$ 是一个半环且 $X \in \mathscr{D}$, 对于 $\mathscr{D}$ 上的 σ 有限测度 μ, 存在 $\sigma(\mathscr{D})$ 上的惟一测度 τ 使得对 $\forall A \in \mathscr{D}$ 有

$$\tau(A) = \mu(A).$$

测度扩张定理的推论

定理： P41, 定理 2.3.4

设 τ 是半环 $\mathscr{D}$ 上的测度 μ 生成的外测度

(1) 对每个 $A \in \mathscr{F}_\tau$, 存在 $B \in \sigma(\mathscr{D})$ 使得 $B \supset A$ 且 $\tau(A) \supset \tau(B)$;

(2) 如果条件 ♠ 中的 $\mathscr{P}$ 换成 $\mathscr{D}$ 成立, 则对于每个 $A \in \mathscr{F}_\tau$, 存在 $B \in \sigma(\mathscr{D})$ 使得 $B \supset A$ 且 $\tau(B \setminus A) = 0$.

测度空间的完备化

定理：

对任何测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$

$$\widetilde{\mathscr{F}} \overset{\text{def}}{=} \{A \cup N : A \in \mathscr{F}, \exists B \in \mathscr{F},\ \mu(B) = 0 \text{ 使得 } N \subset B.\}$$

是一个 σ 域. 如果对每一个 $A \cup N \in \widetilde{\mathscr{F}}$, 令

$$\widetilde{\mu}(A \cup N) = \mu(A),$$

则 $(X, \widetilde{\mathscr{F}}, \widetilde{\mu})$ 是一个完备的测度空间且对每一个 $A \in \mathscr{F}$,

$$\widetilde{\mu}(A) = \mu(A).$$

测度空间的完备化

定理:

设 τ 是关于半环 $\mathscr{D}$ 上的 σ 有限测度 μ 生成的外测度, 则 $(X, \mathscr{F}_\tau, \tau)$ 是 $(X, \sigma(\mathscr{D}), \tau)$ 的完备化.

Outline

测度扩张定理的应用

(1) 准分布函数: $\mathbb{R}$ 上的右连续非降实值函数 F.

(2) 分布函数: 满足 $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$ 和 $\lim_{x\to\infty} F(x)=1$ 的准分布函数.

概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, 随机变量 (r.v.) f

定义:

$F(x) \overset{\text{def}}{=} P(f(\omega)\le x)$, 称为随机变量 f 的分布函数, 也称为 f 服从F, 记为 $f\sim F$.

定义： 几乎处处

在测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上, 关于 X 的元素 x 的一个命题, 如果存在 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 中的零测度集 N 使得该命题对于所有的 $x \in N^c$ 成立, 就说这个命题几乎处处成立, 记为 a.e.

可测函数的几种收敛性

定义:

设 $\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 和 f 是测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数, 如果

$$\mu(\lim_{n\to\infty} f_n \neq f) = 0,$$

则说可测函数列 $\{f_n\}$ 几乎处处以 f 为极限, 记为 $f_n \stackrel{a.e.}{\to} f$.
如果 f a.e. 有限且 $f_n \stackrel{a.e.}{\to} f$, 则说可测函数列 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛到 f.

可测函数的几种收敛性

定理:

$f_n \overset{a.e.}{\to} f$ 当且仅当 $\forall \epsilon > 0$, 有

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|f_m - f| \geq \epsilon\}) = 0.$$

可测函数的几种收敛性

定义： 几乎一致收敛

$\{f_n, n=1,2,\cdots\}$ 和 f 是测度空间 $(X,\mathscr{F},\mu)$ 上的可测函数, 如果对 $\forall\epsilon>0$, 存在 $A\in\mathscr{F}$, 使得 $\mu(A)<\epsilon$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\notin A}|f_n(x)-f(x)|=0,$$

则说 $\{f_n\}$ **几乎一致收敛到** f. 记为 $f_n \overset{a.u.}{\to} f$.

可测函数的几种收敛性

命题：

$f_n \stackrel{a.u.}{\to} f$ 当且仅当 $\forall \epsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{i=n} \{|f_n - f| \geq \epsilon\}) = 0.$$

可测函数的几种收敛性

定义： 依测度收敛

$\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 和 f 是测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数, 如果对 $\forall \epsilon > 0$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \epsilon\}) = 0,$$

则称 $\{f_n\}$ **依测度收敛到** f. 记为 $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

定理:

下列结论成立:

(1)

$$f_n \xrightarrow{a.u.} f \;\Rightarrow\; f_n \xrightarrow{a.e.} f \text{ 和 } f_n \xrightarrow{\mu} f;$$

(2) 如果 $\mu(X) < \infty$, 则

$$f_n \xrightarrow{a.u.} f \;\Leftrightarrow\; f_n \xrightarrow{a.e.} f,$$

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f \;\Rightarrow\; f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

可测函数的几种收敛性

定理:

$f_n \xrightarrow{\mu} f$ 当且仅当 $\{f_n\}$ 的任一子列存在该子列的子列 $\{f_{n'}\}$ 使得

$$f_{n'} \xrightarrow{a.u.} f.$$

当 $\mu(X) < \infty$ 时, 等价于 $f_{n'} \xrightarrow{a.e.} f$.

可测函数的几种收敛性

考虑 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间, $\{f_n, n=1,2,\cdots\}$ 和 f 是其上的随机变量.

$$f_n \xrightarrow{a.e.} f \Leftrightarrow \quad P(\lim_{n\to\infty} f_n = f) = 1$$

$f_n \xrightarrow{a.e.} f$, 几乎必然收敛, 记作 $f_n \xrightarrow{a.s.} f$.

$f_n \xrightarrow{P} f$, 依概率收敛到 f .

Outline

可测函数的几种收敛性

(1) 准分布函数: $\mathbb{R}$ 上的右连续非降实值函数 F.

(2) 分布函数: 满足 $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ 和 $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ 的准分布函数.

概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, 随机变量 (r.v.) f

定义:

$F(x) \overset{\text{def}}{=} P(f(\omega) \le x)$, 称为随机变量 f 的分布函数, 也称为 f 服从F, 记为 $f \sim F$.

定义： 随机元, 分布

设 f 从概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 到可测空间 $(Y, \mathscr{S})$ 的可测映射称为**随机元**. 它在 $(Y, \mathscr{S})$ 上自然导出的概率测度

$$(Pf^{-1})(B) \stackrel{\text{def}}{=} P(f^{-1}B), \ \forall B \in \mathscr{S},$$

称为随机元 f 的**概率分布**或**分布**.

定义： 准分布函数的左连续逆

设 F 是一个准分布函数, 对每个 $t \in (F(-\infty), F(\infty))$, 令

$$F^{\leftarrow}(t) = \inf\{\, x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}.$$

性质：

设 F 是一个 (准) 分布函数, 有

(1) 对于任意的 $t \in (F(-\infty), F(\infty))$, $F^{\leftarrow}(t) \in \mathbb{R}$;

(2) $F^{\leftarrow}(t)$ 左连续;

(3) $\forall t \in (F(-\infty), F(\infty))$, $x \in \mathbb{R}$ 有

$$F^{\leftarrow}(t) \leq x \Leftrightarrow F(x) \geq t.$$

可测函数的几种收敛性

定义： 弱收敛

$\{F_n, n=1,2,\cdots\}$, F 是非降实值函数, 若对于 F 的每一个连续点 x, 都有 $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, 则称 $\{F_n\}$ 弱收敛到 F, 记 $F_n \xrightarrow{w} F$.

定义： 依分布收敛

设 $\{f_n \sim F_n\}$ 是概率空间 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量列, 而 F 是一个分布函数. 若 $F_n \xrightarrow{w} F$, 则称随机变量 $\{f_n\}$ **依分布收敛到**分布函数 F. 记作 $f_n \xrightarrow{d} F$, 若 $f \sim F$, 而且 $f_n \xrightarrow{d} F$, 则称 $\{f_n\}$ **依分布收敛到**f. 记作 $f_n \xrightarrow{d} f$ 或 $f_n \xrightarrow{L} f$.

可测函数的几种收敛性

定理： P53 定理 2.5.6

$$f_n \xrightarrow{P} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{d} f.$$

可测函数的几种收敛性

用 $f \stackrel{d}{=} g$ 表示两个随机变量 f 和 g 有相同的分布函数. 但这两个随机变量可以定义在不同的概率空间上.

定理： Skorokhod 表示定理, 表现定理, 实现定理

设 $\{f_n\}$ 和 f 是概率空间 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量. 如果 $f_n \xrightarrow{d} f$, 则存在一个概率空间 $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{F}}, \widetilde{P})$, 在它上面定义着随机变量 $\{\widetilde{f}_n\}$ 和 $\widetilde{f}$ 使得

$$\widetilde{f}_n \stackrel{d}{=} f_n, n = 1, 2, \cdots \quad \widetilde{f} \stackrel{d}{=} f,$$

而且

$$\widetilde{f}_n \xrightarrow{a.s.} \widetilde{f}.$$

Outline

积分的定义

$(X, \mathscr{F}, P)$

1. 非负简单函数的积分
2. 非负可测函数的积分
3. 一般可测函数的积分

积分：**加权**求和，**加权**平均

积分的定义

$(X, \mathscr{F}, P)$

1. 非负简单函数的积分
2. 非负可测函数的积分
3. 一般可测函数的积分

积分：**加权**求和，**加权**平均

积分的定义

□ 非负简单函数的积分

f 为简单函数：$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$，$a_i \geq 0$

♣

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

积分的定义

命题：

f, g 和 $\{f_n\}$ 都是 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上的简单非负函数.

(1) $\int_X \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A), \quad \forall A \in \mathscr{F}$;

(2) $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq 0$;

(3) $\int_X (af) \,\mathrm{d}\mu = a \int_X f \,\mathrm{d}\mu, \quad a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{R}^-$;

(4) $\int_X (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$;

(5) $f \geq g$, 则 $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X g \,\mathrm{d}\mu$;

(6) $f_n \uparrow$ 且 $\lim_{n\to\infty} f_n \geq g$，则 $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.

积分的定义

命题:

f, g 和 $\{f_n\}$ 都是 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上的简单非负函数.

(1) $\int_X \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A), \quad \forall A \in \mathscr{F}$;

(2) $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq 0$;

(3) $\int_X (af) \,\mathrm{d}\mu = a \int_X f \,\mathrm{d}\mu, \quad a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{R}^-$;

(4) $\int_X (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$;

(5) $f \geq g$, 则 $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X g \,\mathrm{d}\mu$;

(6) $f_n \uparrow$ 且 $\lim_{n\to\infty} f_n \geq g$, 则 $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.

积分的定义

命题:

f, g 和 $\{f_n\}$ 都是 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上的简单非负函数.

(1) $\int_X \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A), \quad \forall A \in \mathscr{F}$;

(2) $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq 0$;

(3) $\int_X (af) \, \mathrm{d}\mu = a \int_X f \, \mathrm{d}\mu, \quad a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{R}^-$;

(4) $\int_X (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X g \, \mathrm{d}\mu$;

(5) $f \geq g$, 则 $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X g \, \mathrm{d}\mu$;

(6) $f_n \uparrow$ 且 $\lim_{n\to\infty} f_n \geq g$, 则 $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.

积分的定义

命题:

f, g 和 $\{f_n\}$ 都是 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上的简单非负函数.

(1) $\int_X \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A), \quad \forall A \in \mathscr{F}$;

(2) $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq 0$;

(3) $\int_X (af) \,\mathrm{d}\mu = a \int_X f \,\mathrm{d}\mu, \quad a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{R}^-$;

(4) $\int_X (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$;

(5) $f \geq g$, 则 $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X g \,\mathrm{d}\mu$;

(6) $f_n \uparrow$ 且 $\lim_{n\to\infty} f_n \geq g$, 则 $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.

积分的定义

命题:

f, g 和 $\{f_n\}$ 都是 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上的简单非负函数.

(1) $\int_X \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A), \quad \forall A \in \mathscr{F}$;

(2) $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq 0$;

(3) $\int_X (af) \,\mathrm{d}\mu = a \int_X f \,\mathrm{d}\mu, \quad a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{R}^-$;

(4) $\int_X (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$;

(5) $f \geq g$, 则 $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X g \,\mathrm{d}\mu$;

(6) $f_n \uparrow$ 且 $\lim_{n\to\infty} f_n \geq g$, 则 $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.

积分的定义

命题：

f, g 和 $\{f_n\}$ 都是 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上的简单非负函数.

(1) $\int_X \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A), \quad \forall A \in \mathscr{F}$;

(2) $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq 0$;

(3) $\int_X (af) \, \mathrm{d}\mu = a \int_X f \, \mathrm{d}\mu, \quad a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{R}^-$;

(4) $\int_X (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X g \, \mathrm{d}\mu$;

(5) $f \geq g$, 则 $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X g \, \mathrm{d}\mu$;

(6) $f_n \uparrow$ 且 $\lim_{n\to\infty} f_n \geq g$，则 $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.

积分的定义

□ 非负可测函数的积分
f 非负可测函数

♣♣

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{ \int_X g \,\mathrm{d}\mu : g\text{非负简单且} g \le f \right\}.$$

积分的定义

命题:

f 是非负可测函数.

(1) 如果 f 是非负简单函数, 则由 ♣ 和 ♣♣ 确定的 $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$ 值相同;

(2) $\{f_n\}$ 是非负简单函数且 $f_n \uparrow f$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

(3)

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\Big[\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}\mu(\{\frac{k}{2^n}\le f<\frac{k+1}{2^n}\})+n\mu(\{f\ge n\})\Big];$$

积分的定义

命题:

f 是非负可测函数.

(1) 如果 f 是非负简单函数, 则由 ♣ 和 ♣♣ 确定的 $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$ 值相同;

(2) $\{f_n\}$ 是非负简单函数且 $f_n \uparrow f$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

(3)

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\Big[\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}\mu(\{\frac{k}{2^n}\le f<\frac{k+1}{2^n}\})+n\mu(\{f\ge n\})\Big];$$

积分的定义

命题:

f 是非负可测函数.

(1) 如果 f 是非负简单函数, 则由 ♣ 和 ♣♣ 确定的 $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$ 值相同;

(2) $\{f_n\}$ 是非负简单函数且 $f_n \uparrow f$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

(3)

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\Big[\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}\mu(\{\frac{k}{2^n}\le f<\frac{k+1}{2^n}\})+n\mu(\{f\ge n\})\Big];$$

积分的定义

命题:

f 是非负可测函数.

(1) 如果 f 是非负简单函数, 则由 ♣ 和 ♣♣ 确定的 $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ 值相同;

(2) $\{f_n\}$ 是非负简单函数且 $f_n \uparrow f$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

(3)

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \Big[\sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\mu(\{\frac{k}{2^n} \le f < \frac{k+1}{2^n}\}) + n\mu(\{f \ge n\}) \Big];$$

积分的定义

命题：续

(4) $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq 0$;

(5) $\int_X (af) \, \mathrm{d}\mu = a \int_X f \, \mathrm{d}\mu$;

(6) $\int_X (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \int_X g \, \mathrm{d}\mu$;

(7) 若 $f \geq g$, 则 $\int_X f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_X g \, \mathrm{d}\mu$.

积分的定义

命题：续

(4) $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq 0$;

(5) $\int_X (af)\,\mathrm{d}\mu = a\int_X f \,\mathrm{d}\mu$;

(6) $\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$;

(7) 若 $f \geq g$, 则 $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.

积分的定义

命题：续

(4) $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq 0$;

(5) $\int_X (af) \,\mathrm{d}\mu = a \int_X f \,\mathrm{d}\mu$;

(6) $\int_X (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$;

(7) 若 $f \geq g$, 则 $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.

积分的定义

命题：续

(4) $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq 0$;

(5) $\int_X (af) \,\mathrm{d}\mu = a \int_X f \,\mathrm{d}\mu$;

(6) $\int_X (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$;

(7) 若 $f \geq g$, 则 $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.

积分的定义

□ 一般可测函数的积分

定义：

$(X, \mathscr{F}, P)$ 上的可测函数 f，如果满足

$$\min\{\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu, \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu\} < \infty,$$

则称**其积分存在或积分有意义**.
如果满足

$$\max\{\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu, \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu\} < \infty,$$

则称它是**可积的**.

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu$$

叫做 f 的积分或积分值.

积分的定义

定义：

设 $A \in \mathscr{F}$, 只要可测函数 $f\mathbf{1}_A$ 的积分存在或可积, 就分别说 f 在集合 $A \in \mathscr{F}$ 上的积分存在或者可积，并把

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu \overset{\mathrm{def}}{=} \int_X f\mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu$$

叫做 f 在集合 $A \in \mathscr{F}$ 上的积分.

积分的定义

定理:

设 f 是 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上的可测函数

(1) 若 f 积分存在, 则 $\left|\int_X f \, \mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$;

(2) f 可积当且仅当 $|f|$ 可积;

(3) 若 f 可积, 则 $|f| < \infty \quad a.e.$.

积分的定义

定理:

设 f, g 是 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上的可测函数

(1) 若 f 积分存在, $\forall A \in \mathscr{F}$, 且 $\mu(A) = 0$, 有

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = 0;$$

(2) f, g 积分存在且 $f \geq g$ *a.e.*, 则 $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X g \,\mathrm{d}\mu$;

(3) 若 $f = g$ *a.e.*, 则只要其中任一个的积分存在，另一个的积分也存在而且两个积分值相等.

积分的定义

推论：

设 f 是 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上的可测函数, $f = 0$ *a.e.* 则 $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$; 反之, 若 $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$ 且 $f \geq 0$ *a.e.*, 则 $f = 0$ *a.e.*.

Outline

积分的性质

定理:

f, g 是 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上的积分存在的可测函数

(1) $\forall a \in \mathbb{R}$, af 积分存在且

$$\int_X (af)\,\mathrm{d}\mu = a\int_X f\,\mathrm{d}\mu\ ;$$

(2) 若 $\int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu$ 有意义, 则 $f+g$, $a.e.$ 有意义，其积分存在且

$$\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

积分的性质

定理:

设 f, g 是 $(X, \mathscr{F}, P)$ 上的可积函数

(1) 若 $\int_A f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_A g \, \mathrm{d}\mu$, $\forall A \in \mathscr{F}$, 则 $f \geq g$ *a.e.*;

(2) 若 $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_A g \, \mathrm{d}\mu$, $\forall A \in \mathscr{F}$, 则 $f = g$ *a.e.*.

积分的性质

定理： 积分的绝对连续性

若 f 可积, 则对任何 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得对于任何满足 $\mu(A) < \delta$ 的 $A \in \mathscr{F}$, 均有

$$\int_A |f| \, \mathrm{d}\mu < \epsilon.$$

三大积分收敛定理：积分号下取极限

定理： LEVI 定理

设 $\{f_n,\ n = 1, 2, \cdots\}$ 和 f 均为 a.e. 非负可测函数，如果 $f_n \uparrow f$ *a.e.*，则

$$\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \uparrow \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

三大积分收敛定理：积分号下取极限

设 $\{A_n \in \mathscr{F}, n = 1, 2, \cdots\}$ 是两两不交的集合序列且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$, 则称其为 $(X, \mathscr{F})$ 的 (可列) 可测分割.

推论：

若 f 的积分存在, 则对任一可测可列划分割 $\{A_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 有

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu.$$

三大积分收敛定理：积分号下取极限

推论： 《测度论讲义》第二版 P51 定理 3.2.3

设 $\{f_n,\ n=1,2,\cdots\}$ 积分存在，

(1) $\{f_n\}$ *a.e.* 单增且 $f_n \to f$ *a.e.*，若 $\int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu > -\infty$，则 f 的积分存在且

$$\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \uparrow \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

(2) $\{f_n\}$ *a.e.* 单减且 $f_n \to f$ *a.e.*，若 $\int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu < \infty$，则 f 的积分存在且

$$\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \downarrow \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

三大积分收敛定理：积分号下取极限

定理： Fatou 引理

对任何 a.e. 非负可测的函数序列 $\{f_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 有

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

三大积分收敛定理：积分号下取极限

推论：

设 $\{f_n,\ n=1,2,\cdots\}$ 是可测函数序列,

(1) 若存在可积函数 g, 使得 $f_n \geq g$, 则 $\liminf_{n\to\infty} f_n$ 积分存在且满足
$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

(2) 若存在可积函数 g, 使得 $f_n \leq g$, 则 $\liminf_{n\to\infty} f_n$ 积分存在且满足
$$\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

三大积分收敛定理：积分号下取极限

推论： 《测度论讲义》第二版 P51 定理 3.2.4

设 $\{f_n\}$ 可测函数序列，每个 f_n 积分存在

(1) 若存在 g 可测函数，$\int_X g \,\mathrm{d}\mu > -\infty$，使得 $\forall n \geq 1$，$f_n \geq g$ a.e.，则 $\liminf_{n\to\infty} f_n$ 积分存在且有

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

(2) 若存在 g 可测函数，$\int_X g \,\mathrm{d}\mu < \infty$，使得 $\forall n \geq 1$，$f_n \leq g$ a.e.，则 $\limsup_{n\to\infty} f_n$ 积分存在且有

$$\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

三大积分收敛定理：积分号下取极限

定理：Lebesgue 控制收敛定理

设 $\{f_n\}$ 可测函数序列，f 可测函数. 若存在非负**可积函数** g，满足 $\forall n \geq 1$, $|f_n| \leq g$, 则 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$

$$\Longrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

定理： LEBESGUE 有界控制收敛定理

$(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是有限测度空间, 设 $\{f_n\}$ 可测函数序列，f 可测函数.
若存在常数 M，满足 $\forall n \geq 1$, $|f_n| \leq M$, 则 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$

$$\Longrightarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

积分变换公式

定理： 积分变换公式

设 g 是由测度空间 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 到可测空间 $(Y, \mathscr{S})$ 的可测映射,

(1) 对于每个 $B \in \mathscr{S}$，令 $\nu(B) = \mu(g^{-1}B)$，则 $(Y, \mathscr{S}, \nu)$ 还是一个测度空间;

(2) 对于 $(Y, \mathscr{S}, \nu)$ 上的任何可测函数 f，只要等式

$$\int_Y f \,\mathrm{d}\nu = \int_X f \circ g \,\mathrm{d}\mu$$

之一端有意义, 就一定成立.

Outline

$L_p(X, \mathscr{F}, \mu),\ 0 < p \le \infty$

定义： $1 \le p < \infty$

$$L_p(X, \mathscr{F}, \mu) \overset{\text{def}}{=} \{f \,|\, f \text{ 关于 } \mathscr{F} \text{ 可测, 且 } \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty\}$$

$$\|f\|_p \overset{\text{def}}{=} \Big(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{p}}, \text{ 范数, 模}$$

$L_p(X, \mathscr{F}, \mu)$, $1 \le p < \infty$

(1) 等价：$f = g$ μ-a.e. 视 L_p 中几乎处处相等的函数为同一个元，即 L_p 为按 μ 等价关系所作的商空间.

(2) $\forall a \in \mathbb{R}$, $f \in L_p$, $\|af\|_p = |a| \|f\|_p$.

(3) 线性空间, 对线性运算封闭: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ 有

$$f, g \in L_p \Longrightarrow af + bg \in L_p.$$

Minkowski 不等式

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p, \quad p \ge 1.$$

$$\left(\int |f + g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \; p \ge 1$$

$L_p(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是赋范线性空间.

$L_p(X, \mathscr{F}, \mu)$, $1 \leq p < \infty$

(4) 距离：$\rho(f, g) \overset{\text{def}}{=} \|f - g\|_p$.

(5) 完备性：

定理 3.3.8

$1 \leq p < \infty$, $\{f_n\} \subset L_p$, 满足

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_p = 0,$$

则存在 $f \in L_p$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

$L_p(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是 Banach 空间.
$p = 2$ 时称为 Hilbert 空间.

$L_p(X, \mathscr{F}, \mu)$, $p = \infty$

定义： $L_\infty(X, \mathscr{F}, \mu)$

称 $\mathscr{F}$ 可测的实值函数 f **本性有界**，如果存在非负实数 c，使得

$$\mu(\{x, |f(x)| > c\}) = 0.$$

$$L_\infty(X, \mathscr{F}, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f\text{本性有界}\mathscr{F}\text{可测函数.}\}$$

$$\|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{c \geq 0 | \mu(\{x, |f(x)| > c\}) = 0\}.$$

$L_p(X, \mathscr{F}, \mu)$, $p = \infty$

定理:

$\|\cdot\|_\infty$ 是 $L_\infty(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是的一个范数. $L_\infty(X, \mathscr{F}, \mu)$ 在范数 $\|\cdot\|_\infty$ 下是一个 Banach 空间.

Hölder 不等式

Hölder 不等式

如果 $1 < p.q < \infty$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\int_X |fg| \mathrm{d}\mu \leq \Big(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_X |g|^q \mathrm{d}\mu \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

或 $p = 1, q = \infty$,

$$\int_X |fg| \mathrm{d}\mu \leq \Big(\int_X |f| \mathrm{d}\mu \Big) \|g\|_\infty.$$

总之有，

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

$L_p(X, \mathscr{F}, \mu),\ 0 < p < 1$

定义： $0 < p < 1$

$$L_p(X, \mathscr{F}, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \,|\, f \text{ 关于 } \mathscr{F} \text{ 可测, 且 } \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty\}$$

$$\|f\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \int_X |f|^p \mathrm{d}\mu,$$

$L_p(X, \mathscr{F}, \mu)$, $0 < p < 1$

(1) 等价：$f = g$ μ-a.e. 视 L_p 中几乎处处相等的函数为同一个元，即 L_p 为按 μ 等价关系所作的商空间.

(2) $\forall a \in \mathbb{R}$, $f \in L_p$, $\|af\|_p = |a|^p \|f\|_p$. 不是范数.

(3) 线性空间, 对线性运算封闭: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ 有

$$f, g \in L_p \Longrightarrow af + bg \in L_p.$$

Minkowski 不等式

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \quad 0 < p < 1.$$

(4) 距离：$\rho(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \|f - g\|_p$.

(5) 完备性：

定理 3.3.8

$0 < p \leq \infty$, $\{f_n\} \subset L_p$, 满足

$$\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_p = 0,$$

则存在 $f \in L_p$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

定义：p 阶平均收敛, $0 < p < \infty$

$\{f_n\} \subset L_p$, 如果存在 $f \in L_p$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0,$$

则称 $\{f_n\}$ p 阶平均收敛到 f. $f_n \xrightarrow{p} f$.

$L_p(X, \mathscr{F}, \mu)$

定理

设 $0 < p < \infty, \{f_n\} \subset L_p, f \in L_p$

1. 若 $f_n \xrightarrow{L_p} f$，则 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 且 $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.
2. 若 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则

$$\|f_n\|_p \to \|f\|_p \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{L_p} f.$$

$L_p(X, \mathscr{F}, \mu)$, $0 < p < 1$

定义：弱收敛

若当 $1 < p < \infty$ 时或 $p = 1$ 且 $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 为 σ 有限测度空间时，$\{f_n, f\} \subset L_p$，如果任意的 $g \in L_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n g \,\mathrm{d}\mu = \int_X fg \,\mathrm{d}\mu.$$

记为 $f_n \overset{(w)L_p}{\to} f$.

定理

设 $1 < p.q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\{f_n, f\} \subset L_p$, 若 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 或 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 且 $\|f_n\|_p$ 有界，则 (f_n) 在 L_p 中弱收敛到 f.

定理

设 $\{f_n, f\} \subset L_1$. 若 $\|f_n\|_1 \to \|f\|_1$ 且 $f_n \xrightarrow{\mu} f$ 或者 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ 成立，则

(1) $f_n \xrightarrow{L_1} f$;

(2) $f_n \xrightarrow{(w)L_1} f$;

(3) $\int_A f_n \mathrm{d}\mu \to \int_A f \mathrm{d}\mu,\ A \in \mathscr{F}$.

定理

$1 \leq p < \infty$, $f_n \xrightarrow{L_p} f$ 蕴含 $f_n \xrightarrow{(w)L_p} f$.

$L_p(X, \mathscr{F}, \mu)$