2025 年春季学期*应用随机分析* 课程作业

2025 年 6 月 9 日

参考教材: 《随机微分方程及其应用概要》2014 年 1 月第三次印刷版本
课本习题以此版本为准.

每单周周二交作业, 双周周二发作业
如果双周周二有同学未到教室上课, 没有拿到自己已批改的作业, 也许之后可以在智华楼一层西南角图书漂流角处寻找自己的作业

目录

1 2 月 18 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解) 1

2 2 月 20 日 (已批改, 课堂有讲解) 2

3 2 月 25 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解) 3

4 3 月 4 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解) 5

5 3 月 6 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解) 6

6 3 月 11 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解) 7

7 3 月 18 日 (已批改) 8

8 3 月 20 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解) 9

9 3 月 25 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解) 10

10 4 月 1 日 (已批改, 课堂有讲解) 11

11 4 月 3 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解) 12

12 4 月 8 日 (已批改, 课堂有讲解) 13

13 4 月 10 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解) 14

14 4 月 15 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解) 15

15 4 月 22 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解) 16

16 4 月 29 日 (已批改, 有提示) 17

17 5 月 13 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解) **18**

18 5 月 15 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解) **19**

19 5 月 20 日 (已批改, 有提示) **21**

20 5 月 27 日 (有提示) **23**

21 5 月 29 日 **24**

22 6 月 3 日 (有提示) **25**

1　2 月 18 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解)

1. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 为一个概率空间, 证明: 事件域 $\mathcal{F}$ 的一个等价定义为

   (1) $\mathcal{F}$ 非空;

   (2) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$, 即 $A \in \mathcal{F}$ 蕴含 $A^c \in \mathcal{F}$;

   (3) $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \cdots \Longrightarrow \cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, 即 $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \cdots$ 蕴含 $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

2. 设 $\mathcal{F}$ 为一个事件域, 证明: 对于 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$, 则 $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{F}$, $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$. (**提示:** $A_1 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_n \cup A_n \cdots$)

3. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 为一个概率空间, 证明: $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$ 两两不交, 即互不相容, 则

$$\mathrm{P}(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k).$$

   作业批改提示: 取 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$, 并证明 $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$.

4. 证明讲义性质 1.2.3 (第 3-4 页), 即概率的连续性.

5. 阅读《概率论基础》第三版（李贤平编著，高等教育出版社 2010）第一章的第一节、第二节和第五节.

6. 阅读讲义第 5 页例 1.2.2 以及其后的一段。

2　2 月 20 日 (已批改, 课堂有讲解)

1. $f(x)=x$ 是 $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 到 $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 的可测函数 (随机变量). 证明: 对于任意的分布函数 $F(x)$, 存在 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上的概率测度 P_F, 使得 $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mathrm{P}_F)$ 上的随机变量 $f(x)$ 的分布函数是 $F(x)$.

2. f 是从 $\mathbb{R}^n$ 映射到 $\mathbb{R}^d$ 的函数, 如果对于任意的 $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^d$, 都有
$$\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n : f_i(\mathbf{x})\le a_i,\ i=1,\dots,d\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$
则称 f 是 Borel 函数. 根据测度论, Borel 函数的定义等价于: 对于任意的 $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n : f(\mathbf{x})\in A\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. 设 $\boldsymbol{\xi}$ 是关于事件域 $\mathcal{F}$ 的 n 维随机向量, 证明: $f(\boldsymbol{\xi}(\omega))$ 是关于事件域 $\mathcal{F}$ 的 d 维随机向量.

3. 复习随机向量、边际分布 (列、函数、密度) 的相关内容.

4. (1) 设 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$, $\mathcal{F}=\{\Omega,\emptyset,\{\omega_1\},\{\omega_2\}\}$, $\mathrm{P}(\{\omega_1\})=\frac{1}{2}$. 证明: 在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ 上不存在两个非平凡独立同分布的随机变量.
   (2) 设 $\tilde{\Omega}=\Omega\times\Omega=\{(\omega_1,\omega_1),(\omega_1,\omega_2),(\omega_2,\omega_1),(\omega_2,\omega_2)\}$, $\tilde{\mathcal{F}}=\mathscr{P}(\tilde{\Omega})$. $\tilde{\mathrm{P}}((\omega_i,\omega_j))=\frac{1}{4}$, $i=1,2; j=1,2$. 证明: 在 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathrm{P}})$ 上存在两个独立同分布的随机变量.

5. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots.\xi_n,\cdots$ 是同分布的随机变量序列, 满足 $\mathrm{E}\xi_i^2<\infty$, 且对于任意的 $n\neq m$, $\mathrm{cov}(\xi_\mathrm{n},\xi_\mathrm{m})=0$. 证明: $\xi_1,\xi_2,\cdots.\xi_n,\cdots$ 满足弱大数律。

   (思考题: 若不假设同分布性质，这个命题还成立吗？或者问可以在什么条件下成立？)

3　2 月 25 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解)

1. 设 X, Y 是两个零均值独立的 Gauss 随机变量. 设 A 是 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 可测集. $f(x) = \mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_{A^c}(x)$. 证明: $f(Y)X$ 是与 Y 独立的 Gauss 随机变量, 而且 $f(Y)X$ 与 $f(Y)$ 也独立. 进一步求出 $f(Y)X$ 的数学期望与方差.

   作业批改提示:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big(F(f(Y)X)G(Y)\Big) &= \mathrm{E}\Big(F(X)G(Y)\mathbf{1}_{\{f(Y)=1\}} + F(-X)G(Y)\mathbf{1}_{\{f(Y)=-1\}}\Big) \\
&= \mathrm{E}\big(F(X)\big)\mathrm{E}\big(G(Y)\mathbf{1}_{\{f(Y)=1\}}\big) + \mathrm{E}\big(F(-X)\big)\mathrm{E}\big(G(Y)\mathbf{1}_{\{f(Y)=-1\}}\big) \\
&= \mathrm{E}\big(F(X)\big)\mathrm{E}\big(G(Y)\big).
\end{aligned}$$

   即, $f(Y)X$ 与 Y 独立. 在上式中取 $G(x) = 1$, 得 $\mathrm{E}\big(F(f(Y)X)\big) = \mathrm{E}\big(F(X)\big)$, 即 $f(Y)X$ 与 X 同分布.

   施彦锴助教提供完整证明:

   证明. 先证明 $f(Y)X$ 是 Gauss 随机变量:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(f(Y)X \le x) &= \mathbb{P}(f(Y)X \le x, Y \in A) + \mathbb{P}(f(Y)X \le x, Y \in A^c) \\
&= \mathbb{P}(X \le x, Y \in A) + \mathbb{P}(-X \le x, Y \in A^c) \\
&= \mathbb{P}(X \le x)\mathbb{P}(Y \in A) + \mathbb{P}(-X \le x)\mathbb{P}(Y \in A^c) \quad (\text{利用}X,Y\text{独立}) \\
&= \mathbb{P}(X \le x)\mathbb{P}(Y \in A) + \mathbb{P}(X \le x)\mathbb{P}(Y \in A^c) \quad (\text{利用}X\text{和}-X\text{同分布}) \\
&= \mathbb{P}(X \le x),
\end{aligned}$$

   因而 $f(Y)X \overset{d}{=} X$, $\mathbb{E}(f(Y)X) = \mathbb{E}X = 0, \mathrm{var}(f(Y)X) = \mathrm{var}X$. 又 $\forall B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(f(Y)X \in B, Y \in C) &= \mathbb{P}(f(Y)X \in B, Y \in C, Y \in A) + \mathbb{P}(f(Y)X \in B, Y \in C, Y \in A^c) \\
&= \mathbb{P}(X \in B, Y \in C \cap A) + \mathbb{P}(-X \in B, Y \in C \cap A^c) \\
&= \mathbb{P}(X \in B)\mathbb{P}(Y \in C \cap A) + \mathbb{P}(-X \in B)\mathbb{P}(Y \in C \cap A^c) \\
&= \mathbb{P}(X \in B)\mathbb{P}(Y \in C) \\
&= \mathbb{P}(f(Y)X \in B)\mathbb{P}(Y \in C),
\end{aligned}$$

   因此 $f(Y)X, Y$ 独立. $f(Y)$ 是取值为 1,-1 的离散型随机变量, 故 $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(f(Y)X \in B, f(Y) = 1) &= \mathbb{P}(X \in B, Y \in A) \\
&= \mathbb{P}(X \in B)\mathbb{P}(Y \in A) \\
&= \mathbb{P}(f(Y)X \in B)\mathbb{P}(f(Y) = 1),
\end{aligned}$$

   $f(Y) = -1$ 的情况同理, 故 $f(Y)X, f(Y)$ 独立. □

2. 设随机变量 ξ 满足 $\mathrm{E}\xi^2 < \infty$, 证明:

$$\mathrm{E}(\xi - \mathrm{E}\xi)^2 = \inf_{c \in \mathbb{R}} \mathrm{E}(\xi - c)^2.$$

3. 设随机变量 X 是连续型随机变量, v 满足 $\mathrm{P}(X \le v) = \frac{1}{2}$. 证明: $\mathrm{E}|X - v| = \inf_{c \in \mathbb{R}} \mathrm{E}|X - c|$. v 称为 X 的中位数.

4. 设 X 服从参数为 λ 的 Poisson 分布, 求 v 使得 $\mathrm{E}|X - v| = \inf_{c \in \mathbb{R}} \mathrm{E}|X - c|$.

5. 阅读 2025 版讲义第二章第 19 页倒数第 9 行—第 21 页第 17 行的内容.

6. 设 $\xi, \eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, 求常数 a, b 满足

$$\mathrm{E}(\eta - (a + b\xi))^2 = \inf_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}} \mathrm{E}(\eta - (\alpha + \beta\xi))^2.$$

7. 设 $X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \in A^c \end{cases}$, $A \in \mathcal{F}$, Y 为一个离散型随机变量, 其分布列为 $\mathrm{P}(Y = y_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n \cdots$. 证明

$$\mathrm{E}[X|Y](\omega) = \begin{cases} \mathrm{P}(A|Y = y_i), & Y(\omega) = y_i \text{ 且 } p_i > 0 \\ c_i \ \ (c_i\text{为任一常数}), & \text{若} p_i = 0 \end{cases}.$$

8. 在先后独立地掷两次均匀硬币这个试验中. 设 $X = \begin{cases} 1, & \text{第一次出正面} \\ 0, & \text{第一次出反面} \end{cases}$, Y 表示两次中出现正面的总次数. 求 $\mathrm{E}[X|Y]$ 以及它的分布列.

作业批改提示: $\mathrm{E}[X|Y](\omega) = \begin{cases} 0, & Y(\omega) = 0 \\ \frac{1}{2} & Y(\omega) = 1 \\ 1, & Y(\omega) = 2 \end{cases}$, 即 $\mathrm{E}[X|Y] = \frac{Y}{2}$.

9. 设 (X, Y_1, Y_2) 服从联合密度为 $p(x, y_1, y_2)$ 的连续型随机向量, $\mathrm{E}X^2 < \infty$。求 $\mathrm{E}[X|Y_1, Y_2]$.

(注意: 此题中并没有假设对于任意的 (x, y_1, y_2), $p(x, y_1, y_2) > 0$.)

10. (X_1, X_2, X_3) 服从三元正态分布 $N(\vec{a}, \Sigma)$, 其中 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{t}}$, $\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,2,3}$. 若 $\sigma_{12} = 0$, 求 $\mathrm{E}[X_3|X_1, X_2]$ 以及它的密度函数.

4　3 月 4 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解)

1. 阅读 张恭庆 林源渠 编著 *泛函分析* (上册) 第 69-75 页

2. 设随机向量 (X,Y) 的密度函数是 $p(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$. 求 $E[Y|X]$ 的密度函数.

   作业批改提示: 给定 $X=x$ 的条件下, Y 的条件密度函数为

   $$p_{Y|X}(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}=\begin{cases} e^{x-y} & 0<x<y \\ 0 & \text{其他.} \end{cases}.$$

   $$E(Y|X=x)=\int_x^\infty y e^{x-y} dy = x+1.$$

   故 $E[Y|X]=X+1$. 设 $Z=X+1$. Z 的密度函数为 $e^{1-z}\mathbf{1}_{(1,\infty)}(z)$.

3. 阅读 2025 版讲义例 2.2.2.

4. (即参考教材第 31 页第 4 题，但多一问)

   设 $\eta\sim U[0,1]$, 记

   $$\eta_n=\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{k}{2^n}\mathbf{1}_{\{\frac{k}{2^n}\le\eta<\frac{k+1}{2^n}\}}.$$

   (1) 求 η_n 的分布;
   (2) 给定 $\eta_1=1/2$ 的条件下, η_2 的条件分布律.
   (3) 求 $E[\eta_2|\eta_1]$.

5. (即参考教材第 31 页第 5 题)

   设随机变量 X 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布, 而在随机变量 $X=x$ 条件下，随机变量 Y 的条件分布为二项分布 $B(n,x)$.
   (1) 求 $EY, \mathrm{var}(Y)$.
   (2) 求随机变量 Y 的分布.

6. 阅读 2025 版讲义性质 2.2.6 p28 的验证部分.

7. 证明 2025 版讲义性质 2.2.5. (在 $g(\mathbf{x})$ 有界时证明)

8. 设 X_1, X_2 和 X_3 是三个取值非负整数离散型随机变量.　其联合分布列依赖四个参数 p_1, p_2, p_3 和 n,

   $$P(X_1=n_1, X_2=n_2, X_3=n_3)=\frac{n! p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}}{n_1! n_2! n_3!},$$

   而且 $n_1+n_2+n_3=n$. 证明: 如果 n 是一个服从强度参数为 $\lambda(>0)$ 的 Poisson 分布随机变量, 那么 X_1, X_2, X_3 是相互独立的服从 Poisson 分布的随机变量.

5　3 月 6 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解)

1. (即参考教材第 18 页第 16 题)

   证明: $\mathrm{var}(Y) \geq \mathrm{E}\big(\mathrm{var}(Y|X)\big)$, 其中 $\mathrm{var}(Y|X) = \mathrm{E}\big[\big(Y - \mathrm{E}[Y|X]\big)^2 |X\big]$ 称为 Y 关于 X 的条件方差.

   (**证明提示**: 可以证明 $\mathrm{var}(Y) = \mathrm{E}(\mathrm{var}(Y|X)) + \mathrm{var}(\mathrm{E}[Y|X])$ 成立.

   作业批改提示:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}Y =& \mathrm{E}(Y - \mathrm{E}[Y|X] + \mathrm{E}[Y|X] - \mathrm{E}Y)^2 \\
=& \mathrm{E}(Y - \mathrm{E}[Y|X])^2 + 2\mathrm{E}\big((Y - \mathrm{E}[Y|X])(\mathrm{E}[Y|X] - \mathrm{E}Y)\big) + \mathrm{E}(\mathrm{E}[Y|X] - \mathrm{E}Y)^2
\end{aligned}
$$

   证明上式中的交叉项为零, 对第一项和第三项用全概率公式即可.)

2. (X, Y) 服从二维正态分布, 求 $\mathrm{var}(Y|X)$.

3. 阅读讲义 2025 版例 2.3.1.

6　3 月 11 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解)

1. 设 $\Omega=[0,1], \mathcal{F}=\mathcal{B}([0,1])$, P 为 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度. f 为 $[0,1]$ 上的连续函数. $\mathcal{F}_n=\sigma([\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}), k=0,1,\cdots,2^n-1)$. 求 $\mathrm{E}[f|\mathcal{F}_n]$, 并证明 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\big|\mathrm{E}[f|\mathcal{F}_n]-f\big|=0$, $\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}[f|\mathcal{F}_n]=f$ 几乎处处成立.

   (思考题: 若仅假设 $\mathrm{E}|f|<\infty$, 是否还可以证明上述结论?)

2. 设 $\{X_n\}_{n\ge1}$ 是独立同分布的随机变量, 服从参数为 λ 的指数分布. $S_n=\sum_{k=1}^n X_k$. 证明: $\{S_n\}_{n\ge1}$ 是一个连续状态空间上的马氏链, 即证明对于任意的有界 Borel 函数 f, 下式成立:

$$\mathrm{E}[f(S_{n+1})|S_1,S_2\cdots,S_n]=\mathrm{E}[f(S_{n+1})|S_n].$$

   并求出这个马氏链的转移密度函数.

   作业批改提示: 设 f 是有界 Borel 可测函数,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[f(S_{n+1})|S_1,\cdots,S_n] &= \mathrm{E}[f(S_n+X_{n+1})|S_1,\cdots,S_n]\\ &= \mathrm{E}[f(x+X_{n+1})|S_1,\cdots,S_n]\Big|_{x=S_n}\\ &= \mathrm{E}[f(x+X_{n+1})]\Big|_{x=S_n}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[f(S_{n+1})|S_n] &= \mathrm{E}[f(S_n+X_{n+1})|S_n]\\ &= \mathrm{E}[f(x+X_{n+1})|S_n]\Big|_{x=S_n}\\ &= \mathrm{E}[f(x+X_{n+1})]\Big|_{x=S_n}.\end{aligned}$$

   所以, $\mathrm{E}[f(S_{n+1})|S_1,\cdots,S_n]=\mathrm{E}[f(S_{n+1})|S_n]$.

$$\mathrm{E}[f(S_{n+1})|S_n]=\mathrm{E}[f(x+X_{n+1})]\Big|_{x=S_n}=\int p(x,y)f(y)\mathrm{d}y\Big|_{x=S_n}.$$

$$\mathrm{E}(f(x+X_{n+1}))=\int_0^\infty f(x+y)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y\overset{z=x+y}{=}\int_x^\infty f(z)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda(z-x)}\mathrm{d}z.$$

   因此, $p(x,y)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda(y-x)}\mathbf{1}_{(x,\infty)}(y)$. 为一步转移密度函数.

3. (即参考教材第 48 页第 2 题)
   若 $\{\xi_n\}$ 是鞅列, 而且 $\mathrm{E}\xi_n^+<+\infty$, 则 $\{\xi_n^+\}$ 也是下鞅列. 对应地, 又若 $\mathrm{E}\xi_n^->-\infty$, 则 $\{\xi_n^-\}$ 也是上鞅列.

4. (即参考教材第 48 页第 4 题)
   设 $\xi_n=\sum_{k=1}^n X_k$ 是 $(\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,X_2,...,X_n))_{n\ge1}$ 的鞅列, 且其方差有限, 则序列 $\{X_k\}$ 中的随机变量两两不相关.

   作业批改提示: $\mathrm{E}X_n^2=\mathrm{E}(\xi_n-\xi_{n-1})^2<\infty$.

$$\mathrm{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]=\mathrm{E}[\xi_{n+1}-\xi_n|\mathcal{F}_n]=\mathrm{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n]-\xi_n=0,$$

   所以 $\mathrm{E}X_{n+1}=\mathrm{E}(\mathrm{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n])=0$, 即 $\mathrm{E}X_n=0$, $n\ge2$. $\forall 1\le n<m$,

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X_n,X_m) &= \mathrm{E}X_nX_m-\mathrm{E}X_n\mathrm{E}X_m\\ &= \mathrm{E}(\mathrm{E}[X_nX_m|\mathcal{F}_{m-1}])\\ &= \mathrm{E}(X_n\mathrm{E}[X_m|\mathcal{F}_{m-1}])\\ &= 0.\ \ (\text{由}\mathrm{E}[X_m|\mathcal{F}_{m-1}]=0)\end{aligned}$$

5. 阅读 2025 版讲义例 2.3.3, 例 2.3.5.

7　3 月 18 日 (已批改)

1. 阅读 2025 版讲义例 3.1.6、例 3.1.8、例 3.1.9 和例 3.1.10.

2. (即参考教材第 48 页第 8 题)

   假定随机序列 $(\xi_n, n \geq 0)$ 有数学期望, 且满足

   $$\mathrm{E}[\xi_{n+1}|\xi_n, \cdots, \xi_0] = \alpha\xi_n + \beta\xi_{n-1}, \quad (\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1).$$

   能否选取 c, 使 $\eta_n = c\xi_n + \xi_{n-1}, (n \geq 1, \eta_0 = \xi_0)$ 是 $(\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_0, \cdots, \xi_n))_{n\geq 0}$ 鞅列?

3. (即参考教材第 49 页第 10 题)

   设 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 是简单随机游动. $X_n \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$ $(q = 1 - p)$ 且独立同分布. 证明 $\xi_n = (pz^{2q} + qz^{-2p})^{-n} z^{S_n - n(p-q)}$ 是鞅列.

4. 证明 Doob 下鞅列分解定理.

5. 设 T 是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上服从几何分布的随机变量. 对任意的 $k \geq 1$, $\mathrm{P}(T = k) = p^{k-1}(1-p)$, $0 < p < 1$. 设 $X_0 = 0$, $X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & n \geq T \\ 0 & n < T \end{cases}$. 设 $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)$, 则 $(X_n)_{n\geq 0}$ 关于 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ 适应, 关于时间单调非减. 因此, $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ 是下鞅. 求其 Doob 分解.

8　3 月 20 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解)

1. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathrm{P})$ 是一个带流的概率空间. 若 $(\xi_n)_{n\geq 0}$ 为 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ 适应过程, τ 为 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ 停时, 而且对于任意的 ω, $\tau(\omega) < \infty$. 证明: 则 ξ_τ 为 $\mathcal{F}$ 可测的随机变量.

2. 若 τ, σ 都是 $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ 停时, 证明: $\tau \vee \sigma = \max(\tau, \sigma)$ 和 $\tau + \sigma$ 也是 $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ 停时.

   作业批改提示: 设 $\mathbb{Q}$ 是有理数集合.

$$\{\tau + \sigma > t\} = \bigcup_{s\in\mathbb{Q}\cap(0,t)} \left(\{\tau > s\} \cap \{\sigma > t - s\}\right) \bigcup \{\tau > t\} \bigcup \{\sigma > t\}.$$

3. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}, \mathrm{P})$, τ 是关于 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ 停时.

   (1) 证明: 此时 τ 是停时的等价定义是 $\forall n \geq 0$, $\{\omega : \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$;

   (2) 证明: $\{\tau < n\} \in \mathcal{F}_{n-1}$.

9 3 月 25 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解)

1. 阅读 2025 版讲义例 3.3.3、例 3.34 和例 3.3.5 完整的证明.

2. 设 $(\eta_k^{(n)})_{k\geq 1,n\geq 1}$ 是相互独立同分布的随机变量阵列. $\mathrm{P}(\eta_k^{(n)}=1)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(\eta_k^{(n)}=0)=\frac{1}{2}$. $\xi_k^{(n)}=\sum_{m=1}^n \eta_k^{(m)}$, $\tilde{\tau}_k=\inf\{m\geq 1,\eta_k^{(m)}=0\}$, $\tau_k=\tilde{\tau}_k\wedge M$, 其中 M 是非随机正整数, $M\geq 2$.

   证明: $\mathrm{P}\Big(\lim_{K\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^K \xi_k^{(\tau_k)}}{\sum_{k=1}^K \tau_k}=\frac{1}{2}\Big)=1$.

3. (利用选样定理证明 Wald 第二等式) 设 $(\eta_n)_{n\geq 1}$ 是 i.i.d 的随机变量序列, $\mathrm{E}\eta_1=0$, $\mathrm{E}\eta_1^2=\sigma^2<\infty$. 设 $\mathcal{F}_n=\sigma(\eta_1,\cdots,\eta_n)$, τ 是 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ 停时, 满足 $\mathrm{E}\tau<\infty$, $\xi_n=\sum_{k=1}^n\eta_k$. 证明:

$$\mathrm{E}\xi_\tau^2=\sigma^2\mathrm{E}\tau.$$

   作业批改提示: 设 $\tau_n=\tau\wedge n$, 对于任意的 n, 这是有界停时. 因此, $\mathrm{E}\xi_{\tau_n}^2=\sigma^2\mathrm{E}\tau_n$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\xi_{\tau_n}-\xi_{\tau_{n+k}})^2 &= \mathrm{E}\xi_{\tau_n}^2-2\mathrm{E}\xi_{\tau_n}\xi_{\tau_{n+k}}+\mathrm{E}\xi_{\tau_{n+k}}^2\\ &= \mathrm{E}\xi_{\tau_n}^2-2\mathrm{E}\big(\xi_{\tau_n}\mathrm{E}[\xi_{\tau_{n+k}}|\mathcal{F}_{\tau_n}]\big)+\mathrm{E}\xi_{\tau_{n+k}}^2\\ &= \mathrm{E}\xi_{\tau_n}^2-2\mathrm{E}(\xi_{\tau_n}^2)+\mathrm{E}\xi_{\tau_{n+k}}^2\\ &= \mathrm{E}\xi_{\tau_{n+k}}^2-\mathrm{E}\xi_{\tau_n}^2\\ &= \sigma^2\mathrm{E}(\tau_{n+k}-\tau_n)\end{aligned}$$

   注意到 $\mathrm{E}\tau<\infty$ 蕴含 $\mathrm{E}(\tau_{n+k}-\tau_n)\stackrel{n,k\to\infty}{\longrightarrow}0$. 这说明 (ξ_{τ_n}) 是 L^2 中的 Cauchy 列, 由 ξ_{τ_n} 几乎处处收敛到 ξ_τ 得到 $\mathrm{E}(\xi_{\tau_n}-\xi_\tau)^2\stackrel{n\to\infty}{\to}0$. 因此

$$\mathrm{E}\xi_\tau^2=\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(\xi_{\tau_n})^2=\sigma^2\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\tau_n=\sigma^2\mathrm{E}\tau.$$

4. $(\eta_n)_{n\geq 1}$ 是 i.i.d 的随机变量序列, η_1 服从 $[0,1]$ 的均匀分布, $\xi_n=\sum_{k=1}^n\eta_k$. $\tau=\inf\{n,\xi_n\geq 1\}$. 求 $\mathrm{E}\tau$ 和 $\mathrm{E}\xi_\tau$.

10　4 月 1 日 (已批改, 课堂有讲解)

1. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathrm{P})$ 是一个带流的概率空间. 设 τ 和 σ 为 $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ 停时. 证明: 若 $\tau \leq \sigma$, 则 $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$.

2. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathrm{P})$ 是一个带流的概率空间. 若 $(\xi_n)_{n\geq 0}$ 为 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ 适应过程, τ 为 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ 停时. 而且对于任意的 ω, $\tau(\omega) < \infty$. 证明: 则 ξ_τ 为 $\mathcal{F}_\tau$ 可测的随机变量.

3. (**此题是选作题**) 设 $(X_n)_{n\geq 0}$ 是有限状态空间 S 上的不可约马氏链, 转移矩阵为 $\mathbf{P}$, 设 A 是 S 的子集. $F : A \to \mathbb{R}$ 与 $g : S \setminus A \to \mathbb{R}$ 是两个给定的函数. 设 $\tau = \inf\{n, X_n \in A\}$, $\tau_n = \tau \wedge n$. 设函数 $f : S \to \mathbb{R}$ 满足

$$f(x) = F(x), \quad x \in A;$$

$$\big((\mathbf{P} - \mathbf{I})f\big)(x) = g(x), \quad x \in S \setminus A, \quad \mathbf{I}\text{是单位矩阵}.$$

   (a) 设 $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)$. 证明: $M_n = f(X_{\tau_n}) - \sum_{j=0}^{\tau_n - 1} g(X_{\tau_j})$ 是 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ 鞅;

   (b) 利用选样定理证明

$$f(x) = \mathrm{E}\Big[F(X_\tau) - \sum_{j=0}^{\tau-1} g(X_j)\Big| X_0 = x\Big].$$

   参考建议: 也许参考一下 2025 版讲义第三章例 3.1.10 和定理 3.3.5 会有帮助. 这道题的背景是来源于二阶椭圆方程边值问题的概率解.

   而且首先要证 $\mathrm{E}\tau < \infty$.

4. 证明: 若 $(\xi_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ 为下鞅, $\sigma \leq \tau < M$ 为两个有界 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ 停时, 则

$$\mathrm{E}[\xi_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \geq \xi_\sigma.$$

5. 设 $(\xi_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ 为下鞅, 对于任意的正整数 N, 对于任意的 $a > 0$, 证明:

$$a\mathrm{P}(\min_{0\leq n\leq N} \xi_n \leq -a) \leq -\mathrm{E}\xi_0 + \mathrm{E}\xi_N^+.$$

6. 阅读例 3.4.1, 定理 3.4.4 及其证明和例 3.4.2.

11　4 月 3 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解)

1. 考虑 2025 版讲义例 3.1.8 的 Polya 罐子模型. 证明其中的鞅 $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ 几乎处处且 L^1 收敛到极限 M_∞, 并求出这个随机变量 M_∞ 的分布函数.

   作业批改提示: 首先, 因为 $0 \leq M_n \leq 1$ 是有界的, 所以 M_∞ 存在. 其次 $\mathrm{P}\left(M_n = \frac{k}{n+2}\right) = \frac{1}{n+1}$, $k = 1, 2, \cdots, n+1$.

2. 设 $(X_n)_{n\geq 1}$ 时独立同分布随机变量序列, $\mathrm{P}(X_1 = \frac{3}{2}) = \mathrm{P}(X_1 = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. 设 $M_0 = 1$, $M_n = \prod_{i=1}^n X_i$, $\mathcal{F}_n = \sigma(M_0, X_1, \cdots, X_n)$. 证明:

   (1) $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ 是鞅;

   (2) 存在随机变量 M_∞ 使得 M_n 几乎处处收敛到 M_∞;

   (3) 求 M_∞ 的分布函数.

   (4) 是否存在某个 $p \geq 1$ 使得 M_n 在 L^p 下收敛到 M_∞?

   作业批改提示: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln X_i \xrightarrow{a.s.} \mathrm{E}\ln X_1 < 0$. 因此, $\ln M_n = \sum_{i=1}^n \ln X_i \xrightarrow{a.s.} -\infty$. 由此得 $M_n \xrightarrow{a.s.} 0$, 即 $M_\infty = 0$.

3. 阅读 2025 版讲义第 4.1 节内容. 进一步如果感兴趣, 可以阅读讲义 p65 和 p67 脚注中关于布朗运动的文献.

12　4 月 8 日 (已批改, 课堂有讲解)

1. 设
$$B_t = B_0 + A \cdot \bar{B}_t + b \cdot t,$$
是一个 n 维漂移布朗运动. 若 A 是 $n \times n$ 非退化常数矩阵, 求 $(B_t)_{t \geq 0}$ 的转移密度函数.

13　4 月 10 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解)

1. 设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是标准布朗运动, $X_t = \dfrac{\sqrt{c}B_{\mathrm{e}^{2\beta t}}}{\mathrm{e}^{\beta t}}$, $t \geq 0$, $\beta > 0$. $(X_t)_{t\geq 0}$ 是平稳 OU 过程. 设 $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.

   (1) 证明 $(X_t)_{t\geq 0}$ 是关于 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 的马氏过程;

   (2) 求这个马氏过程的转移密度函数;

   (3) 求 $(X_t)_{t\geq 0}$ 的漂移系数和扩散系数;
   作业批改提示: $-\beta x f'(x) + \beta c f''(x)$.

   (4) 求 $(X_t)_{t\geq 0}$ 转移密度函数满足的 Kolmogorov 向后方程和向前方程.

2. 设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是 d-维标准布朗运动. 验证

$$\lim_{t-s\downarrow 0} \frac{1}{t-s} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathrm{P}(|B_t - x| > \varepsilon | B_s = x) = 0.$$

3. 设 $(X_t)_{t\geq 0}$ 是强度参数为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 过程.

   (1) 证明: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 任意非负整数 k, $\lim_{t-s\downarrow 0} \mathrm{P}(|X_t - k| > \varepsilon | X_s = k) = 0$;

   (2) 求 $\lim_{t-s\downarrow 0} \frac{1}{t-s}\mathrm{P}(|X_t - k| > \varepsilon | X_s = k)$;

   (3) 求 $\lim_{t-s\downarrow 0} \frac{1}{t-s}\mathrm{E}((X_t - k)\mathbf{1}_{\{X_t - k < \varepsilon\}} | X_s = k)$;

   (4) 求 $\lim_{t-s\downarrow 0} \frac{1}{t-s}\mathrm{E}(X_t - k | X_s = k)$.

14　4 月 15 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解)

1. 阅读 2025 版讲义第 4.3.3 节.

2. 设 $U(x):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的二次光滑函数, 满足 $\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\frac{2U(x)}{\sigma^2}} \mathrm{d}x < \infty$. 第 4.3.3 节中讨论的 d 维扩散过程 $(X_t)_{t\geq 0}$ 的漂移系数为$-\nabla U$, 扩散系数矩阵为 $\sigma^2 I$, 其中 I 为单位矩阵, $\sigma^2 > 0$ 是常数. 求 $(X_t)_{t\geq 0}$ 的不变概率密度.

3. 证明 2025 版讲义例 5.2.3.

15　4 月 22 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解)

1. 证明 2025 版讲义第五章例 5.4.1.

2. 证明 2025 版讲义第五章性质 5.4.1.

3. 设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是一维标准 Brown 运动, $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{N_n}^{(n)} = t$ 是 $[0,t]$ 的划分, $\lambda_n = \max_i\{t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}\}$.

   (a) 设
$$\tilde{\phi}_t^{(n)} = \sum_k B_{t_{k+1}^{(n)}} \mathbf{1}_{(t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]}(t).$$
$$H_n^{\tilde{\phi}} \equiv \sum_k B_{t_{k+1}^{(n)}} \Delta B_{t_k^{(n)}} = \sum_{k=0}^{N_n-1} B_{t_{k+1}^{(n)}} \big(B_{t_{k+1}^{(n)}} - B_{t_k^{(n)}}\big),$$
   证明: 当 $\lambda_n \to 0$ 时
$$H_n^{\tilde{\phi}} \xrightarrow{L^2} \frac{1}{2}B_t^2 + \frac{1}{2}t.$$

   (b) 设
$$\Psi_t^{(n)} = \sum_{k=0}^{N_n-1} \frac{B_{t_k^{(n)}} + B_{t_{k+1}^{(n)}}}{2} \mathbf{1}_{(t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]}(t),$$
   证明: 当 $\lambda_n \to 0$ 时
$$H_n^{\Psi} \equiv \sum_{k=0}^{N_n-1} \frac{B_{t_k^{(n)}} + B_{t_{k+1}^{(n)}}}{2} \Delta B_{t_k^{(n)}} \xrightarrow{L^2} \frac{1}{2}B_t^2.$$

   (c) 设
$$\xi_t^{(n)} = \sum_{k=0}^{N_n-1} B_{\frac{t_k^{(n)} + t_{k+1}^{(n)}}{2}} \mathbf{1}_{(t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]}(t),$$
   证明: 当 $\lambda_n \to 0$ 时
$$H_n^{\xi} \equiv \sum_{k=0}^{N_n-1} B_{\frac{t_k^{(n)} + t_{k+1}^{(n)}}{2}} \Delta B_{t_k^{(n)}} \xrightarrow{L^2} \frac{1}{2}B_t^2.$$

   作业批改提示: 记 $a_k^{(n)} = \frac{t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}}{2}$
$$\begin{aligned}
&\sum_k B_{\frac{t_k^{(n)} + t_{k+1}^{(n)}}{2}} \Delta B_{t_k^{(n)}} \\
=&\frac{1}{2}\sum_k \big(B_{t_{k+1}^{(n)}}^2 - B_{t_k^{(n)}}^2\big) + \frac{1}{2}\Big[\sum_k \big(B_{\frac{t_k^{(n)} + t_{k+1}^{(n)}}{2}} - B_{t_k^{(n)}}\big)^2 - \sum_k \big(B_{t_k^{(n+1)}} - B_{\frac{t_k^{(n)} + t_{k+1}^{(n)}}{2}}\big)^2\Big] \\
=&\frac{1}{2}\sum_k \big(B_{t_{k+1}^{(n)}}^2 - B_{t_k^{(n)}}^2\big) + \frac{1}{2}\Big[\sum_k \big[\big(B_{\frac{t_k^{(n)} + t_{k+1}^{(n)}}{2}} - B_{t_k^{(n)}}\big)^2 - a_k^{(n)}\big] - \sum_k \big[\big(B_{t_k^{(n+1)}} - B_{\frac{t_k^{(n)} + t_{k+1}^{(n)}}{2}}\big)^2 - a_k^{(n)}\big]\Big] \\
=&\frac{1}{2}(I + (II - III))
\end{aligned}$$
   与 Lévy 振动性质证明类似, 可以证明第 II 项和第 III 项的 L^2 极限为 0.

16　4 月 29 日 (已批改, 有提示)

1. τ 是 $\mathcal{F}_t^B=\sigma(B_u,\,u\le t)$ 停时, 若 $\tau\le T$, 请在 τ 仅取有限个值的假设下证明:
$$\int_0^\tau \phi_t \mathrm{d}B_t=\int_0^T \phi_t \mathbf{1}_{(0,\tau]}(t)\mathrm{d}B_t.$$
作业批改提示:
方法 1: 先对可料阶梯过程证明, 再逼近.
方法 2: $\int_0^T \phi_s \mathbf{1}_{(0,\tau]}(s)\mathrm{d}B_s=\int_0^T \phi_s(1-\mathbf{1}_{(\tau,T]})\mathrm{d}B_s=\int_0^T \phi_s\mathrm{d}B_s-\int_0^T \phi_s\mathbf{1}_{(\tau,T]}(s)\mathrm{d}B_s$.
$$\begin{aligned}\int_0^T \phi_s\mathbf{1}_{(\tau,T]}(s)\mathrm{d}B_s &= \sum_{j=1}^n \int_0^T \phi_s\mathbf{1}_{(t_j,T]}(s)\mathbf{1}_{\{\tau=t_j\}}\mathrm{d}B_s\\ &= \sum_{j=1}^n \int_{t_j}^T \phi_s\mathbf{1}_{(t_j,T]}(s)\mathbf{1}_{\{\tau=t_j\}}\mathrm{d}B_s\\ &= \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_j\}}\int_{t_j}^T \phi_s\mathrm{d}B_s\\ &= \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{\tau=t_j\}}\Big(\int_0^T \phi_s\mathrm{d}B_s-\int_0^{t_j}\phi_s\mathrm{d}B_s\Big)\\ &= \int_0^T \phi_s\mathrm{d}B_s-\int_0^\tau \phi_s\mathrm{d}B_s.\end{aligned}$$
其中特别注意需要证明过程 $(\phi_s\mathbf{1}_{(t_j,T]}(s)\mathbf{1}_{\{\tau=t_j\}})_{s\in[0,T]}$ 是适应的.

2. 严格完整证明 2025 版讲义引理 5.5.1, 即证明:
设 $g(x)$ 是有界连续函数. $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$ 是 $[0,t]$ 的划分, $\lambda=\max_{0\le k\le n-1}(t_{k+1}-t_k)$, 则
$$\lim_{\lambda\to 0}\mathrm{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1}g(B_{t_k})\left(B_{t_{k+1}}-B_{t_k}\right)^2-\int_0^t g(B_s)\mathrm{d}s\right]^2=0.$$
具体而言, 其中需要有两个关键步骤:
   (1) 首先请严格完整证明 2025 版讲义例 5.4.1.
   (2) 其次请严格完整证明:
$$\lim_{\lambda\to 0}\mathrm{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1}g(B_{t_k})\left(B_{t_{k+1}}-B_{t_k}\right)^2-\sum_{k=0}^{n-1}g(B_{t_k})(t_{k+1}-t_k)\right]^2=0$$

3. 阅读 2025 版讲义引理 5.5.2. 及其证明.

4. 阅读 2025 版讲义定理 5.5.2. 的证明.

5. 设 $(B_t^{(1)})$, $(B_t^{(2)})$ 是两个独立的布朗运动, 对于 $[0,t]$ 中的一个划分 $0=t_0<\cdots<t_n=t$,
$$T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\big(B_{t_{k+1}}^{(1)}-B_{t_k}^{(1)}\big)\big(B_{t_{k+1}}^{(2)}-B_{t_k}^{(2)}\big),$$
证明: $\mathrm{E}(T_n)=0$; 当 $\max_k(t_{k+1}-t_k)\to 0$ 时, $\mathrm{E}(T_n)^2\to 0$.

17　5 月 13 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解)

1. (参考主要参考书第 99 页习题 9, 但多一小题)

   判别下列是否为 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 鞅 (需要证明): $t^2B_t - 2\int_0^t sB_s\mathrm{d}s$, $t^2B_t - 2\int_0^t s\mathrm{d}B_s$, $B_t^3 - 3tB_t$.

   作业批改提示: 可以直接利用鞅的定义验证. 也可以利用 Itô 公式, 例如: 设 $f(t,x) = t^2x$, $f(t,B_t) = t^2B_t$.

   $$\mathrm{d}f(t,B_t) = 2tB_t\mathrm{d}t + t^2\mathrm{d}B_t.$$

   注意到对于任意的 $T > 0$, $\int_0^T t^4\mathrm{d}t < \infty$, 则 $(t^2B_t - 2\int_0^t sB_s\mathrm{d}s = \int_0^t s^2\mathrm{d}B_s)_{t\geq 0}$ 是鞅.

2. (即主要参考书第 99 页习题 13)

   设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是一维标准布朗运动, 设 $g_k(t) = \mathrm{E}|B_t^k|, k = 0,1,2\cdots$. 利用 Itô 公式证明

   $$g_k(t) = \frac{1}{2}k(k-1)\int_0^t g_{k-2}(s)\mathrm{d}s,\quad k\geq 2.$$

   并于此计算 $\mathrm{E}(|B_t|^k)$, $k = 1,2\cdots$.

   ($f(x) = |x|^k, k = 3,4,\cdots$ 是二次连续可微的)

   作业批改提示:

   $$g_k(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}(k-1)!!t^{\frac{k}{2}} & k \text{ 奇} \\ (k-1)!!t^{\frac{k}{2}} & k \text{ 偶} \end{cases}.$$

3. (可以参考主要参考书第 99 页第 10 题, 但请注意与其表述是不同)

   设 $(B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$ 是二维布朗运动, $(B_0^{(1)})^2 + (B_0^{(2)})^2 \neq 0$. 判断 $(B_t^{(1)}B_t^{(2)})_{t\geq 0}$ 与 $\left(\ln\left[(B_t^{(1)})^2 + (B_t^{(2)})^2\right]\right)_{t\geq 0}$ 是否是 $(\mathcal{F}_t^{\mathbf{B}})_{t\geq 0}$ 鞅, 是否是 $(\mathcal{F}_t^{\mathbf{B}})_{t\geq 0}$ 局部鞅, 并请写出你的判断的数学证明.

18　5 月 15 日 (已批改, 有提示, 课堂有讲解)

1. 阅读 2025 版第 6.1 节中所有的例子, 并自己演算一遍.
2. 求解 2025 版第 6.1 节中例 6.1.5 的随机微分方程 (6.1.22).
3. 设 $c, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是常数, $\mathbf{B}_t = (B_t^{(1)}, \cdots, B_t^{(n)})$ 是 n-维布朗运动

$$X_t = \exp\Big(ct + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j B_t^{(j)}\Big).$$

证明:

$$\mathrm{d}X_t = \big(c + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2\big) X_t \mathrm{d}t + X_t \big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathrm{d}B_t^{(j)}\big).$$

作业批改提示: 直接用 Itô 公式验证.

4. (即主要参考书第 139 页第 3 题, 参看主要参考书第 110 页例 6.7 的内容)
求证方程

$$\mathrm{d}\xi_t = [c(t) + b(t)\xi_t]\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{m} [\sigma_i(t) + a_i(t)\xi_t]\mathrm{d}B_t^{(i)},$$
$$\xi_0 = \xi_0$$

的解是

$$\xi_t = F(t)\Big[\xi_0 + \int_0^t F(s)^{-1}\Big(c(s) - \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(s) a_i(s)\Big)\mathrm{d}s + \int_0^t \sum_{i=1}^{m} F(s)^{-1}\sigma_i(s)\mathrm{d}B_s^{(i)}\Big],$$

其中

$$F(t) = e^{\int_0^t [b(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} a_i^2(s)]\mathrm{d}s + \int_0^t \sum_{i=1}^{m} a_i(s)\mathrm{d}B_s^{(i)}}.$$

5. (即主要参考书第 139 页第 8 题)
证明方程

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\xi_t &= -\frac{1}{2}\xi_t \mathrm{d}t - \eta_t \mathrm{d}B_t, \\ d\eta_t &= -\frac{1}{2}\eta_t \mathrm{d}t + \xi_t \mathrm{d}B_t. \end{aligned}$$

有解 $(\xi_t, \eta_t) = (\cos B_t, \sin B_t)$. 而且其任意一个解满足 $\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2} = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}$.
作业批改提示: 利用 Itô 公式计算 $\mathrm{d}(\xi_t^2 + \eta_t^2) = 0$ 即可. 不建议对 $\mathrm{d}\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2}$ 用 Itô 公式.

5. (即主要参考书第 139 页第 11 题)
对于光滑函数 $\sigma(x)$, 证明 $g(B_t)$ 是方程

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\xi_t &= \frac{1}{2}\sigma'(\xi_t)\sigma(\xi_t)\mathrm{d}t + \sigma(\xi_t)\mathrm{d}B_t, \\ \xi_0 &= 0. \end{aligned}$$

的解, 其中 $g(x)$ 是函数 $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{\sigma(u)}$ 的反函数.

6. (即主要参考书第 138 页第 1 题)
给出一般的形式随机微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi_t}{\mathrm{d}t^2} = -\lambda^2 \xi_t - b\frac{\mathrm{d}\xi_t}{\mathrm{d}t} + \sigma \dot{B}_t,$$

$$\xi_0 = x,\ \frac{\mathrm{d}\xi_t}{\mathrm{d}t}\,|_{t=0} = v_0,$$

严格的数学形式, 并求显式解.

作业批改提示:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\xi_t = & v_t \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v_t = & -\lambda^2 \xi_t \mathrm{d}t - b v_t \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t \\ v_0 = & v_0 \\ \xi_0 = & x \end{cases}. \tag{1}$$

先形式求解 $y''(t) + by'(t) + \lambda^2 y(t) = f(t)$ 这个 ODE. 根据 ODE 理论, 按照 $b^2 > 4\lambda^2$, $b^2 = 4\lambda^2$ 和 $b^2 < 4\lambda^2$ 分三种情况讨论. 之后把 $f(t)\mathrm{d}t$ 项换成 $\sigma\mathrm{d}B_t$. 最后用 Itô 公式验证其满足 (1).

19　5 月 20 日 (已批改, 有提示)

1. 阅读 2025 版讲义 p110, p111 上半部分的内容.

2. 若随机微分方程
$$\mathrm{d}\xi_t = b(t,\xi_t)\mathrm{d}t + \sigma(t,\xi_t)\mathrm{d}B_t, \tag{2}$$
有唯一解, 有时也称这个解为扩散过程. 若假设上述方程 (2) 的系数光滑, 解有转移密度函数, 求其转移密度函数满足的向前方程和向后方程.

   进一步如果 $(\boldsymbol{\xi}_t)_{t\ge 0}$ 是一个 2-维扩散过程, $(\mathbf{B}_t)_{t\ge 0}$ 是 2 维布朗运动,
$$\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t = \mathbf{b}(t,\boldsymbol{\xi}_t)\mathrm{d}t + \Sigma(t,\boldsymbol{\xi}_t)\mathrm{d}\mathbf{B}_t,$$
其中
$$\mathbf{b}(t,x) = \begin{pmatrix} b_1(t,x) \\ b_2(t,x) \end{pmatrix}, \qquad \Sigma(t,x) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(t,x) & \sigma_{12}(t,x) \\ \sigma_{21}(t,x) & \sigma_{22}(t,x) \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$
若 $(\boldsymbol{\xi}_t)_{t\ge 0}$ 的转移密度函数存在, 请形式的推导 $(\boldsymbol{\xi}_t)_{t\ge 0}$ 应该满足的 Kolmogorov 向前, 向后方程.

3. 阅读 2025 版讲义例 6.2.2 的推导.

4. 阅读 2025 版讲义例 3.1.10.

5. 求解方程 $\mathrm{d}\xi_t = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\xi_t}\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\xi_t}\mathrm{d}B_t$, 并证明它在一个有限的随机时间爆炸.

   (设 ζ 是 $(\mathcal{F}_t^B)_{t\ge 0}$ 停时, $\xi = (\xi_t)_{t<\zeta}$ 称为上面方程的以 ξ_0 为初值, 以 ζ 为爆炸时的局部解, 如果
$$\xi_t = \xi_0 - \int_0^t \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\xi_s}\mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{e}^{-\xi_s}\mathrm{d}B_s$$
对于 $t<\zeta$ 恒成立, 其中
$$\int_0^t \mathrm{e}^{-\xi_s}\mathrm{d}B_s = \int_0^t \mathrm{e}^{-\xi_s}\mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(s)\mathrm{d}B_s.$$
(这里 $\tau_n = \inf\{t, |\xi_t| \ge n\}$), 而且 (ξ_t) 在 $(\zeta-\epsilon,\zeta)$ 上几乎处处无界.)

   作业批改提示: $\xi_t = \log(B_t + \mathrm{e}^{\xi_0})$.

6. (主要参考书第 163 页第 2 题)
假定 $u(t,x)$ 满足方程
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$
证明: $\mathrm{E}u(t,B_t) = u(0,0)$, 其中 $(B_t)_{t\ge 0}$ 是标准布朗运动.

   作业提示: 对 $u(t,B_t)$ 用 Itô 公式.

7. (主要参考书第 164 页第 4 题)
求一维终值问题
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u(T,x) = f(x) \end{cases}$$
的解 $u(t,x)$, $0\le t\le T$, 再将结果推广至多维.

   答案提示: 设 $p(t,x,y)$ 是 n-维布朗运动的转移密度, 设 $u(t,x) = \mathrm{E}[f(B_{T-t})|B_0 = x] = \int f(y)p(T-t,x,y)\mathrm{d}y$. 可以直接验证（假设积分号求导可以交换顺序）.

8. 设 $\mathbf{B}_t$ 是 n 维布朗运动, $B(0,R)=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|<R\}$. 设 $x\in\mathbb{R}^n$, $\tau_x=\inf\{t>0,\mathbf{B}_0=x,\mathbf{B}_t\notin B(0,R)\}$. 求 $\mathbf{B}_{\tau_x}$ 的分布.

   答案提示: 可以参考周蜀林老师编著的《偏微分方程》(北大出版社) 第 **50-53** 页的内容. 参看 **2025** 版讲义推论 **6.3.1**, 其中的偏微分方程的显式解可以用球面上的 **Poisson** 核表示出来, 这就是周老师书上第 **53** 页的定理 **2.18**. 参看主要参考书第 **158** 页问题 **1**(定理 **7.14**) 和问题 **2**(定理 **7.15**), 再求解定理 **7.15** 中的偏微分方程.

   这个偏微分方程的显式解可以用球面上的 **Poisson** 核表示出来, 这就是周老师书上第 **53** 页的定理 **2.18**.

20 5 月 27 日 (有提示)

1. 设 n-维扩散过程 $(\xi_t)_{t\geq 0}$ 满足

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t = \mathbf{b}(t,\boldsymbol{\xi}_t)\mathrm{d}t + \Sigma(t,\boldsymbol{\xi}_t)\mathrm{d}\mathbf{B}_t.$$

设 $\mathcal{L}_t = \frac{1}{2}\sum_{ij}^n a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, $(a_{ij}) = \Sigma\Sigma^T$. 设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开区域. 若方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}_t u = 0, & x \in D, \quad t \leq T \\ u(T,x) = 0, & x \in D \\ u(t,x) = 1, & x \in \partial D, \quad s \leq t \leq T \end{cases},$$

有对 t 一次连续可微, 对 x 二次连续可微的唯一解, 记 $u_T(t,x)$. 设 $\tau_x = \inf\{t > 0,\ \boldsymbol{\xi}_t^x \notin D\}$, $x \in D$. 证明:

$$\mathrm{P}(\tau_x < T | \xi_s = x) = u_T(s,x).$$

答案提示: 参看主要参考书第 156-157 页问题 2(定理 7.13) 及其证明与第 157 页的注

2. 阅读 2025 版讲义第 6.3.2 节.

3. 设 $(X_t = \sigma B_t + bt)_{t\geq 0}$ 是一维漂移布朗运动, $x \in (l,r)$. 求 X_t 从 x 出发, 首中 l 和首中 r 的概率. 设 $\tau_{(l,r)} = \inf\{t > 0, X_t \notin (l,r)\}$, 求 $\mathrm{E}(\tau_{(l,r)}|X_0 = x)$.

4. 设 $\mathrm{d}X_t = -bX_t\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}B_t$ 是一维 OU 方程, $x \in (l,r)$. 求 X_t 从 x 出发, 首中 l 和 r 的概率. 设 $\tau_{(l,r)} = \inf\{t > 0, X_t \notin (l,r)\}$, 求 $\mathrm{E}(\tau_{(l,r)}|X_0 = x)$.

   作业提示: 参考 2025 版讲义 6.3.2 节, 直接计算出以上过程的自然尺度函数和速度密度, 再套用相应的公式即得.

5. 考虑如下的随机微分方程

$$\mathrm{d}X(t) = n\mathrm{d}t + 2\sqrt{X(t)}\mathrm{d}B_t,$$

其中, n 为大于 1 的正整数. 设 $\tau_0 = \inf\{t \geq 0,\ X_t = 0\}$. 证明: $\mathrm{P}(\tau_0 = \infty | X_0 = x) = 1$, $x > 0$.

答案提示: 由 Yamada-Watanabe 定理知道, 这个方程在 $(0,\infty)$ 非爆炸.

$$S(x) = \begin{cases} \ln x & n = 2, \\ \frac{x^{1-\frac{n}{2}} - 1}{1 - \frac{n}{2}} & n \geq 3. \end{cases}.$$

设 $0 < a < x < b$,

$$\mathrm{P}_x(\tau_a < \tau_b) = \frac{S(b) - S(x)}{S(b) - S(a)} = \begin{cases} \frac{\ln b - \ln x}{\ln b - \ln a} & n = 2, \\ \frac{b^{1-\frac{n}{2}} - x^{1-\frac{n}{2}}}{b^{1-\frac{n}{2}} - a^{1-\frac{n}{2}}} & n \geq 3. \end{cases}$$

取 $a_m \downarrow 0$, $\{\tau_0 < \tau_b\} \subset \cap_{m=1}^\infty \{\tau_{a_m} < \tau_b\}$, 故

$$\mathrm{P}_x\{\tau_0 < \tau_b\} = \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}_x\{\tau_{a_m} < \tau_b\} = 0.$$

取 $b_m \uparrow \infty$, $\tau_\infty = \lim_{m\to\infty} \tau_{b_m}$, 由非爆炸条件, $\mathrm{P}_x(\tau_\infty = \infty) = 1$, $\{\tau_0 < \tau_\infty\} = \cup_{m=1}^\infty \{\tau_0 < \tau_\infty\}$,

$$\mathrm{P}_x(\tau_0 < \infty) = \mathrm{P}_x(\tau_0 < \tau_\infty) = \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}_x(\tau_0 < \tau_{b_m}) = 0.$$

故 $\mathrm{P}_x(\tau_0 = \infty) = 1$.

特别提示: 这里先对 $b_m \to \infty$, 再对 $a_m \to 0$ 取极限来做是不行的. 原因在于我们只能得到 $\{\tau_0 < \infty\} \subset \cap_{m=1}^\infty \{\tau_{a_m} < \infty\}$.

21　5 月 29 日

1. 证明 2025 版讲义定理 6.4.2. (仅在 $q(x) \geq 0$ 的条件下证)
2. 如果对 Lévy ArcSine law 完整证明感兴趣, 可以阅读

   Karatzas I., Shreve S.E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* 2nd ed. Springer 1991

   p271-275 内容

22　6 月 3 日 (有提示)

1. 如果对欧式期权未定权益的定价公式深入的数学理论感兴趣的话, 可以参看

   (1) 严加安　金融数学引论　科学出版社 2012

   相关章节

   (2) 龚光鲁　随机微分方程及其应用概要　清华大学出版社 2014 年 1 月第 3 次印刷

   第 9.2 节内容

   (3) 史树中　金融学中的数学　高等教育出版社

   2006 相关章节

   (4) A. Etheridge　*A Course in Financial Calculus.*　Cambridge University Press 2002

   中译本 张寄洲等译　金融数学教程　人民邮电出版社 2006

   相关章节

   (5) É Pardoux　*Markov Processes and Applications: Algorithms, Networks, Genome and Finance.*　Wiley series in probability and statistics.　2008

   中译本 许明宇 译 马尔可夫过程及其应用: 算法、网络、基因与金融 高等教育出版社 2019

   第 9 章

2. 设
$$\mathrm{d}X_t = -bX_t\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}B_t.$$
   $f(x)$ 连续有界, 对于任意的 $t < T$, 设
$$Y_t = E\big[f(X_T\mathrm{e}^{-r(T-t)})\big|\mathcal{F}_t\big],$$
$$v(t,x) = \mathrm{E}\big[f(X_T)\mathrm{e}^{-r(T-t)}\big|X_t = x\big]. \tag{3}$$
   利用非齐次扩散过程的 Feynman-Kac 公式写出 $v(t,x)$ 应该满足的偏微分方程, 以及 $V(T,X_T)$ 的值. 利用 $(X_t)_{t\geq 0}$ 的显式解, 写出 $v(t,x)$ 的显式表达式.

   答案提示: 与上题做法类似. $v(t,x)$ 应该满足的 PDE:
$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - bx\frac{\partial v}{\partial x} - rv = 0 \\ v(T,x) = f(x) \end{cases},$$
   计算 OU 方程的转移概率 (讲义上有) 代入 (3).

3. 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个二阶光滑的势函数, 满足 $U(x) \geq 0$, $\lim_{|x|\to\infty} U(x) = \infty$, $\nabla U(x)$ 是整体 Lipschitz 连续的, 对于任意 $\varepsilon > 0$, $Z_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon}}\mathrm{d}x < \infty$, 并假设 U 的局部极小值点只有有限个. 考虑如下的扩散过程:
$$\mathrm{d}X_t^\varepsilon = -\nabla U(X_t^\varepsilon)\mathrm{d}t + \sqrt{\varepsilon}\mathrm{d}B_t, \tag{4}$$
   其中, $(B_t)_{t\geq 0}$ 是 n 维布朗运动. 证明:

   (1) 对于任意的 $0 < T < \infty$, 若 $X_0 = X_0^\varepsilon = x$, 则任给 $\delta > 0$,
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{P}\big(\sup_{t\in[0,T]}|X_t^\varepsilon - X_t| < \delta\big) = 1.$$
   其中 X_t 是无随机扰动的梯度下降系统
$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t} = -\nabla U(X_t).$$

答案提示: 设 $|\nabla U(x)-\nabla U(y)|\le K|x-y|$.

$$X_t^\varepsilon = x-\int_0^t \nabla U(X_s^\varepsilon)\mathrm{d}s+\sqrt{\varepsilon}B_t,$$

$$X_t = x-\int_0^t \nabla U(X_s)\mathrm{d}s.$$

$$X_t^\varepsilon - X_t=\int_0^t[\nabla U(X_s^\varepsilon)-\nabla U(X_s)]\mathrm{d}s+\sqrt{\varepsilon}B_t.$$

$$\sup_{0\le t\le T}|X_t^\varepsilon - X_t|\le\int_0^T[\sup_{0\le u\le s}|\nabla U(X_u^\varepsilon)-\nabla U(X_u)|]\mathrm{d}s+\sqrt{\varepsilon}\sup_{0\le t\le T}|B_t|.$$

$$\sup_{0\le t\le T}|X_t^\varepsilon - X_t|\le K\int_0^T[\sup_{0\le u\le s}|X_u^\varepsilon - X_u|]\mathrm{d}s+\sqrt{\varepsilon}\sup_{0\le t\le T}|B_t|.$$

注意到, $\mathrm{P}(\sup_{0\le t\le T}|\sqrt{\varepsilon}B_t|\ge\delta)\overset{\varepsilon\to 0}{\to}0$, 利用 Gronwall 不等式即得.

(2) 证明 $\pi^\varepsilon(\cdot)=\frac{1}{Z_\varepsilon}\int_\cdot \mathrm{e}^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon}}\mathrm{d}x$ 是 $(X_t^\varepsilon)_{t\ge 0}$ 的不变概率测度.

答案提示: $\mathcal{L}_\varepsilon^*\phi(x)=\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^n\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_i^2}\phi(x)+\sum_{i=1}^n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\big(\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x_i}\phi(x)\big)$.

直接验证 $\mathcal{L}_\varepsilon^*\mathrm{e}^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon}}=0$ 即可.

(3) 设 $A=\{x:U(x)=\inf_{y\in\mathbb{R}^n}U(y)\}$, 即 A 是 U 的全局最小值点集, O_δ 为 A 的 δ 领域. 证明: $\lim_{\varepsilon\to 0}\pi^\varepsilon(O_\delta)=1$.

答案提示: 不妨设 $\inf_{y\in\mathbb{R}^n}U(y)=0$. 因为 U 只有有限个全局最小点, U 连续, 所以存在 $\kappa>0$, 使得 $A_\kappa=\{x\in\mathbb{R}^n:U(x)\le\kappa\}\subset O_\delta$. 因此只需要证明 $\lim_{\varepsilon\to 0}\pi^\varepsilon(A_\kappa)=1$.

$$\pi^\varepsilon(A_\kappa)=\frac{\int_{A_\kappa}\mathrm{e}^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon}}\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon}}\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+\frac{\int_{\mathbb{R}^n\setminus A_\kappa}\mathrm{e}^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon}}\mathrm{d}x}{\int_{A_\kappa}\mathrm{e}^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon}}\mathrm{d}x}}.$$

只需要证明:

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n\setminus A_\kappa}\mathrm{e}^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon}}\mathrm{d}x}{\int_{A_\kappa}\mathrm{e}^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon}}\mathrm{d}x}\overset{\varepsilon\to 0}{\to}0.$$

取 $\delta_0>0$ 使得 $m+\delta_0<m_0$. 注意到当 $\varepsilon<\varepsilon_0, x\in\mathbb{R}^n\setminus A_\kappa$ 时,

$$\mathrm{e}^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon}}<\mathrm{e}^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon_0}},\ \mathrm{e}^{-\frac{2\kappa}{\varepsilon}}<\mathrm{e}^{-\frac{2\kappa}{\varepsilon_0}}.$$

注意到

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus A_\kappa}\mathrm{e}^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon}}\mathrm{d}x\le\int_{\mathbb{R}^n\setminus A_\kappa}\mathrm{e}^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon_0}}\mathrm{d}x<\infty.$$

因此,

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus A_\kappa}\mathrm{e}^{-\frac{2(U(x)-\kappa)}{\varepsilon}}\mathrm{d}x\le\int_{\mathbb{R}^n\setminus A_\kappa}\mathrm{e}^{-\frac{2(U(x)-\kappa)}{\varepsilon_0}}<\infty \tag{5}$$

由 **(5)** 和 **Lebesgue** 控制收敛定理得

$$0\le\frac{\int_{\mathbb{R}^n\setminus A_\kappa}\mathrm{e}^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon}}\mathrm{d}x}{\int_{A_\kappa}\mathrm{e}^{-\frac{2U(x)}{\varepsilon}}\mathrm{d}x}\le\frac{1}{|A_\kappa|}\int_{\mathbb{R}^n\setminus A_\kappa}\mathrm{e}^{-\frac{2(U(x)-\kappa)}{\varepsilon}}\mathrm{d}x\overset{\varepsilon\to 0}{\to}0.$$

4. 设

$$\mathrm{d}X_t=X_t(\lambda-X_t^2)\mathrm{d}t+\sigma X_t\mathrm{d}B_t.$$

(1) 当 $\lambda > 0$ 时, 考虑 X_t 在 $(0,\infty)$ 的运动. 验证当 $\sigma^2 < 2\lambda$ 时,

$$p_s(x) = \frac{1}{z} x^r \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\sigma^2}},$$

是 X_t 的不变概率密度, 其中 $z = \int_0^\infty x^r \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \mathrm{d}x$.

答案提示: 当 $\sigma^2 < 2\lambda$ 时, $\int_0^\infty \frac{1}{z} x^r \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \mathrm{d}x < \infty$.

验证 $\mathcal{L}^* p_s(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\sigma^2 x^2 p_s(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x(\lambda - x^2)p_s(x)\big) = 0$.

(2) 当 $\lambda > 0$, $X_0 > 0$ 和 $\sigma^2 > 2\lambda$ 时, $\lim_{t\to\infty} X_t = 0, a.s.\mathrm{P}$.

答案提示: 首先我们假设这个方程存在唯一非爆炸的解.

设 $\alpha = \frac{2\lambda}{\sigma^2}$. 考虑 $\sigma^2 > 2\lambda$, 即 $\alpha < 1$.

$$S(x) = \int^x y^{-\alpha} \mathrm{e}^{\frac{y^2}{\sigma^2}} \mathrm{d}y.$$

取 $b_n \uparrow \infty$, $\tau_\infty = \lim_{n\to\infty} \tau_{b_n}$, 由非爆炸条件知道 $\mathrm{P}_x(\tau_\infty = \infty) = 1, x > 0$.

$$\{\tau_0 < \tau_\infty\} = \cup_{n=1}^\infty \{\tau_0 < \tau_n\}.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_x(\tau_0 < \infty) &= \mathrm{P}_x(\tau_0 < \tau_\infty) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_x(\tau_0 < \tau_{b_n}) \\
&= \frac{\int_x^{b_n} y^{-\alpha} \mathrm{e}^{\frac{y^2}{\sigma^2}} \mathrm{d}y}{\int_0^{b_n} y^{-\alpha} \mathrm{e}^{\frac{y^2}{\sigma^2}} \mathrm{d}y} \\
&\quad \text{注意到} \int_0^x y^{-\alpha} \mathrm{e}^{\frac{y^2}{\sigma^2}} \mathrm{d}y < \infty, \ \int_x^{b_n} y^{-\alpha} \mathrm{e}^{\frac{y^2}{\sigma^2}} \mathrm{d}y \overset{n\to\infty}{\to} \infty \\
&\overset{n\to\infty}{\to} 1.
\end{aligned}$$

故 $\mathrm{P}_x(\tau_0 < \infty) = 1$, 又因为这个过程存在唯一的非爆炸解, 所以过程一旦到达 0 点, 就永远待在 0 点, 此时就有 $\lim_{t\to\infty} X_t = 0$, $a.s.\mathrm{P}$.

关于这个方程存在唯一非爆炸解的证明并不是平凡的. 首先由方程系数满足局部 **Lipschitz** 条件得到它存在唯一的局部解. 其次需要利用如下参考书中的定理得到有非爆炸的解.

1. 龚光鲁、钱敏平 编著 随机微分方程引论 (第三版) 电子工业出版社 **2019**

此书第 **222** 页定理 **5.9**

或者

2. L.C.G. Rogers and D. Williams. Diffusions, Markov Processes and Martingales, Vol 2., Cambridge University Press 2000.

此书第 **297** 页 **Theorem 52.1 (Khasminskii's test for explosion.)**