2017年春季学期《应用随机分析》作业

教材: 《随机微分方程及其应用概要》2014年1月第三次印刷版本
课本习题以此版本为准.

Contents

1 2月22日

1. 设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为一个概率空间，证明：事件域$\mathcal{F}$的一个等价定义为

   (1) $\mathcal{F}$非空;

   (2) 若$A \in \mathcal{F}$，则$A^c \in \mathcal{F}$;

   (3) 若$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{F}$，对于任意$n \geq 1$， $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$。

2. 设$\mathcal{F}$为一个事件域，证明：对于$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$, 则$A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{F}$，$A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$。

   (**注意事项：** $A_1 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_n \cup A_n \cdots$)

3. 设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为一个概率空间，证明：$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$两两不交，即互不相容，则

$$P(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

2 2月24日

1. 设$\xi_1, \xi_2, \cdots .\xi_n, \cdots$是同分布的随机变量序列, 满足$E\xi_i^2 < \infty$, 且对于任意的$n \neq m$, $\mathrm{cov}(\xi_\mathrm{n}, \xi_\mathrm{m}) = 0$.证明: $\xi_1, \xi_2, \cdots .\xi_n, \cdots$满足弱大数律。

   (**注意事项：** 若不假设同分布性质，这个命题还成立吗？或者问可以在什么条件下成立？)

2. 设$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}\}$, $P(\{\omega_1\}) = p, 0 < p < 1$. 证明: 在概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上, 不存在两个非平凡独立同分布的随机变量.

3 3月1日

1. 阅读教材1.3.3节内容.

2. 若ξ服从二元Gauss分布$N(0,\Sigma_\xi)$，其中

$$\Sigma_\xi = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

η服从二元非退化正态分布, 其协方差阵为

$$\Sigma_\eta = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

问是否存在2×2矩阵A, 使得$\xi = A\eta$. 若存在, 求出A; 若不存在, 写出你的理由; 写出η的密度函数.

(**注意事项：** A不唯一；η的均值不一定为0，为什么？)

3. **教材第19页第23题**

设X,Y,Z,W是相互独立的标准正态随机变量. 设$a,b\geq 0$, 证明：

$$P\big(a\sqrt{X^2+Y^2} > b\sqrt{Z^2+W^2}\big) = \frac{a^2}{a^2+b^2}.$$

4 3月8日

1. 设$X(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\in A^c\end{cases}$，$A\in\mathcal{F}$，$Y$为一个离散型随机变量，其分布列为$P(Y=y_i)=p_i,\quad i=1,2,\cdots,n\cdots$。证明

$$E[X|Y](\omega)=\begin{cases}P(A|Y=y_i), & Y(\omega)=y_i\text{ 且 }p_i>0\\ c_i(c_i\text{为任一常数}), & \text{若}p_i=0\end{cases}.$$

（**提示：可以用定义直接验证。**）

2. 在先后独立地掷两次均匀硬币这个试验中，设 $X=\begin{cases}1, & \text{第一次出正面}\\ 0, & \text{第一次出反面}\end{cases}$，$Y$表示两次中出现正面的总次数。求$E[X|Y]$以及它的分布列。

3. 设(X,Y_1,Y_2)服从联合密度为$p(x,y_1,y_2)$的连续型随机向量，$EX^2<\infty$。求$E[X|Y_1,Y_2]$。

   (注意：此题中并没有假设对于任意的(x,y_1,y_2)**,** $p(x,y_1,y_2)>0$**.)**

4. (X_1,X_2,X_3)服从三元正态分布$N(\vec{a},\Sigma)$，其中$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)^T,\Sigma=(\sigma_{ij})_{i,j=1,2,3}$。若$\sigma_{12}=0$， 求$E[X_3|X_1,X_2]$以及它的密度函数。

5 3月10日

1. 设随机向量(X,Y)的密度函数是 $p(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & 其它 \end{cases}$. 求$E[Y|X]$的密度函数。

2. (即课本第31页第4题，但多一问)

   设$\eta \sim U[0,1]$,记
$$\eta_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{\{\frac{k}{2^n} \le \eta < \frac{k+1}{2^n}\}}.$$
   (1) 求η_n的分布；
   (2) 给定$\eta_1 = 1/2$的条件下，η_2的条件分布律.
   (3) 求$E[\eta_2|\eta_1]$.

3. (即课本第31页第5题)

   设随机变量X服从$[0,1]$上的均匀分布，而在随机变量$X=x$条件下，随机变量Y的条件分布为二项分布$B(n,x)$.
   (1) 求$EY, \mathrm{var}(Y)$.
   (2) 求随机变量Y的分布.

6 3月17日

1. (即课本第18页第16题)

   证明：$\mathrm{var}(Y) \geq E\big(\mathrm{var}(Y|X)\big)$，其中$\mathrm{var}(Y|X) = E\big[\big(Y - E[Y|X]\big)^2|X\big]$称为$Y$关于$X$ 的条件方差。

2. (X, Y)服从二维正态分布，求$\mathrm{var}(Y|X)$。

3. 设$\{X_n\}_{n\geq 1}$是独立同分布的随机变量，服从参数为λ的指数分布。$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$。证明；$\{S_n\}_{n\geq 1}$是一个连续状态空间上的马氏链，即证明对于任意的有界Borel函数f，下式成立：

   $$E[f(S_{n+1})|S_1, S_2 \cdots, S_n] = E[f(S_{n+1})|S_n].$$

   求出这个马氏链的转移密度函数。

7 3月22日

1. 设$(B_t)_{t\geq 0}$是标准的布朗运动，$(X_t = B_t + at)_{t\geq 0}$是所谓的漂移布朗运动，$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$。证明：$(X_t)_{t\geq 0}$是关于$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$的马氏过程，即证明：对于任意的有界Borel函数$f$，$s < t$，

$$E[f(X_t)|\mathcal{F}_s] = E[f(X_t)|\sigma(X_s)].$$

并求出$(X_t)_{t\geq 0}$的转移密度函数。

8 3月24日

1. $(\xi_n)_{n\geq 1}$关于σ-域流$(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$适应，证明下列两个命题等价：

   (a) 对任意的n,m，$E[\xi_{n+m}|\mathcal{F}_n]=\xi_n$，即$(\xi_n)_{n\geq 1}$为$(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$鞅;

   (b) 对任意的n，$E[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n]=\xi_n$。

2. (即课本第48页第2题)
   若$\{\xi_n\}$是鞅列，而且$E\xi_n^+ < +\infty$，则$\{\xi_n^+\}$也是下鞅列.对应地,又若$E\xi_n^- > -\infty$,则$\{\xi_n^-\}$ 也是上鞅列。

3. (即课本第48页第4题)
   设$\xi_n=\sum_{k=1}^n X_k$是$(\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,X_2,...,X_n))_{n\geq 1}$的鞅列，且其方差有限，则序列$\{X_k\}$中的随机变量两两不相关。

4. (即课本第48页第8题)

   假定随机序列$(\xi_n,n\geq 0)$有数学期望,且满足

   $$E[\xi_{n+1}|\xi_n,\cdots,\xi_0]=\alpha\xi_n+\beta\xi_{n-1},\quad (\alpha,\beta>0,\alpha+\beta=1).$$

   能否选取c，使$\eta_n=c\xi_n+\xi_{n-1}(n\geq 1,\eta_0=\xi_0)$是$(\mathcal{F}_n=\sigma(\xi_0,\cdots,\xi_n))_{n\geq 0}$鞅列？

5. (即课本第48页第10题)

   设$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$是简单随机徘徊.$X_n\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ q & p\end{pmatrix}(q=1-p)$且独立同分布.证明$\xi_n=(pz^{2q}+qz^{-2p})^{-n}z^{S_n-n(p-q)}$是鞅列.

9 3月29日

1. 设(ξ_n)相互独立， $E|\xi_n| < \infty$， $E\xi_n = \mu_n > 0$， 证明:$X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$为$\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)$下鞅，并求出$(X_n)$的Doob下鞅分解；

   若进一步$E\xi_n = \mu_n = 0$, $E\xi_n^2 < \infty$, $\forall n$, $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$为鞅列. 证明: X_n^2 为下鞅列, 并求出X_n^2的 Doob 下鞅分解。

2. 设$(\eta_n)_{n\geq 1}$是i.i.d的随机变量序列，$P(\eta_n = 1) = p$, $P(\eta_n = -1) = 1 - p$，$0 < p < 1$，$\mathcal{F}_n = \sigma(\eta_1, \cdots, \eta_n)$。

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k, \quad M_n = \frac{1}{[4p(1-p)]^{\frac{n}{2}}} \Big(\frac{1-p}{p}\Big)^{\frac{\xi_n}{2}}.$$

   (a) 证明: $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$是鞅；

   (b) 证明: $(M_n\xi_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$是鞅；

   (c) 设$(R_n)_{n\geq 1}$是一个$(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$适应的过程，而且$R_1 = M_1$。若$(R_n)_{n\geq 1}$和$(R_n\xi_n)_{n\geq 1}$都是关于$(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$的鞅，证明：对于任意的$n$，$R_n = M_n$。

10 4月5日

1. 设$(\eta_n)_{n\geq 1}$是相互独立的随机变量序列，η_n服从$N(0,\sigma_n^2)$，ξ_0是与$(\eta_n)_{n\geq 1}$相互独立的随机变量，$\mathcal{F}_n=\sigma(\xi_0,\eta_1,\cdots,\eta_n)$，$n=0,1,2,\cdots$。当$n\geq 1$时，$a_n$是关于$\mathcal{F}_{n-1}$可测的有界随机变量。

   (a) 证明：
   $$E\Big[\exp\big(a_n\eta_n\big)\Big|\mathcal{F}_{n-1}\Big]=\exp\big(\frac{1}{2}a_n^2\sigma_n^2\big).$$

   (b) 设
   $$z_n=\exp\Big(-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sigma_k^2}\eta_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{\sigma_k^2}\Big).$$

   证明：$(z_n,\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$是鞅。

11 4月7日

(Girsanov-Cameron-Martin定理)

设$(\xi_0, \eta_n,\ n \geq 1)$相互独立，$\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_0, \eta_1, \cdots, \eta_n)$，$E|\xi_0| < \infty$，$\eta_n \sim N(0, \sigma_n^2)$，$b_n \neq 0$，$\frac{c_n}{b_n}$是有界Borel可测函数。

$$\begin{aligned}
\xi_n &= \xi_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k(\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}) \cdot \eta_k + \sum_{k=1}^{n} c_k(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{k-1}) \\
&= \xi_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k(\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}) \Big[\eta_k + \frac{c_k(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{k-1})}{b_k(\xi_0, \xi_1 \ldots, \xi_{k-1})}\Big].
\end{aligned}$$

$$z_n = \exp\Big(- \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{k-1})}{b_k(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{k-1})\sigma_k^2} \eta_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \big(\frac{c_k(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{k-1})}{b_k(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{k-1})\sigma_k}\big)^2 \Big).$$

对于任意的$A \in \mathcal{F}_n$，定义新的概率$\hat{P}(A) = E(\mathbf{1}_A z_n)$，则在$\hat{P}$下，

$$(\eta_1 + \frac{c_1}{b_1}, \cdots, \eta_n + \frac{c_n}{b_n}, \cdots)$$

是相互独立的随机变量序列，而且$\eta_n + \frac{c_n}{b_n} \sim N(0, \sigma_n^2)$。更进一步，$(\xi_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$在$\hat{P}$下是鞅。

1. 设$(\xi_0, \eta_n,\ n \geq 1)$相互独立，$E|\xi_0| < \infty$，$\eta_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$。设$f(\xi_0, \eta_1, \cdots, \eta_n)$是有界Borel函数。$\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_0, \eta_1, \cdots, \eta_n)$，证明：

$$\begin{aligned}
& E\big[\exp\big(f(\xi_0, \eta_1, \cdots, \eta_{n-1})\eta_n\big)\big|\mathcal{F}_{n-1}\big] \\
= \ & \exp\Big(f(\xi_0, \eta_1, \cdots, \eta_{n-1})\mu_n + \frac{1}{2} f^2(\xi_0, \eta_1, \cdots, \eta_{n-1})\sigma_n^2\Big).
\end{aligned}$$

2. 证明Girsanov-Cameron-Martin定理

12 4月12日

1. 若τ, σ都是$(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$停时，证明：$\tau \vee \sigma = \max(\tau, \sigma)$ 和 $\tau + \sigma$ 也是 $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$停时。

2. 设$(\xi_n)_{n\geq 1}$是$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}, P)$上适应的随机序列，$\tau$是关于$\sigma$-域流$(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$的停时，设$\tau$处处取有限值，即$\forall \omega \in \Omega$，$\tau(\omega) < \infty$. 定义$(\xi_\tau)(\omega) = \xi_{\tau(\omega)}(\omega)$，证明：$\xi_\tau$ 是$(\Omega, \mathcal{F})$上的随机变量。

3. 设$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{n\geq 1}, P)$，$\tau$是关于$(\mathcal{F})_{n\geq 1}$停时，证明: 此时$\tau$的等价定义是：$\forall n \geq 0$，$\{\omega : \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$。

13 4月19日

1. (利用选样定理证明Wald等式) 设$(\eta_n)_{n\geq 1}$是i.i.d的随机变量序列，$E|\eta_1| < \infty$，设$\mathcal{F}_n = \sigma(\eta_1, \cdots, \eta_n)$，$\tau$是$(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$停时，满足$E\tau < \infty$，$\xi_n = \sum_{k=1}^n \eta_k$，证明：
$$E\xi_\tau = E\tau E\eta_1.$$
若进一步$E\eta_1 = 0,\ E\eta_1^2 = \sigma^2 < \infty$，证明：
$$E\xi_\tau^2 = \sigma^2 E\tau.$$

2. $(\eta_n)_{n\geq 1}$是i.i.d的随机变量序列，η_1服从$[0,1]$的均匀分布，$\xi_n = \sum_{k=1}^n \eta_k$。 $\tau = \inf\{n, \xi_n \geq 1\}$。求$E\tau$和$E\xi_\tau$。

3. (**此题是选作题**) 设$(X_n)_{n\geq 0}$是有限状态空间S上的不可约马氏链，转移矩阵为$\mathbf{P}$，设A是S的子集。$F: A \to \mathbb{R}$ 与$g: S\setminus A \to \mathbb{R}$是两个给定的函数。设$\tau = \inf\{n, X_n \in A\}$，$\tau_n = \tau \wedge n$。设函数$f: S \to \mathbb{R}$满足
$$f(x) = F(x), \quad x \in A;$$
$$\big((\mathbf{P} - \mathbf{I})f\big)(x) = g(x), \quad x \in S\setminus A, \quad \mathbf{I}\text{是单位矩阵}.$$
   (a) 证明：$M_n = f(X_{\tau_n}) - \sum_{j=0}^{\tau_n - 1} g(X_{\tau_j})$是鞅；
   (b) 利用选样定理证明
$$f(x) = E\Big[F(X_\tau) - \sum_{j=0}^{\tau-1} g(X_j)\Big| X_0 = x\Big].$$
   参考建议： 也许参考一下Levy鞅和讲义中定理7.4会有帮助。这道题的背景是来源于二阶椭圆方程边值问题的概率解。

   而且首先要证$E\tau < \infty$

4. 设τ和σ为$(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$停时。证明：若$\tau \leq \sigma$，则$\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$。

14 4月26日

1. 对于运动$(B_t, t \geq 0)$, 设$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, \quad s \leq t)$，证明：

   (1) $(B_t, t \geq 0)$是$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$鞅；

   (2) $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$是$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$鞅；

   (3) $(z_t = e^{CB_t - \frac{C^2 t}{2}}, t \geq 0)$是$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$鞅。
   建议： (3)参考课本p53命题4.2的证明

2. 设$\{p(t,x,y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ y \in \mathbb{R}^n\}$为$n$维标准布朗运动的转移密度，证明：

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_x p(t,x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial x_i^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_y p(t,x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial y_i^2}. \tag{2}$$

   (2)被称为Kolmogorov向前方程(第二方程)或者Fokker-Planck方程；(1)被称为Kolmogorov向后方程(第一方程)。

3. 设$(B_t)_{t\geq 0}$为漂移布朗运动，即

$$B_t = B_0 + A \cdot \bar{B}_t + b \cdot t,$$

   其中A为一个$n \times r$非零常数矩阵， $\bar{B}_t$为r维标准布朗运动， $b = (b_1, \cdots, b_n)$为一个n维非零常数向量。设AA^T是正定矩阵, A^T表示A的转置。

   (a) 求出$(B_t)_{t\geq 0}$的转移密度$p(t,x,y)$；

   (b) 求出$p(t,x,y)$满足的Kolmogorov向前方程(第二方程或者Fokker-Planck方程)和Kolmogorov 向后方程。

   (c) 设f为$\mathbb{R}^n$上充分光滑具有紧支撑的函数，求

$$\lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{\tau}\Big(E^{s,x} f(B_{s+\tau}) - E^{s,x} f(B_s)\Big).$$

15 5月3日

1. 设$(X_t)_{t\geq 0}$是一个时间齐次取值在有限状态空间S的马氏链，它的转移速率矩阵记为$\mathbf{Q}$。f是S上的函数。 求：

$$\lim_{\tau\downarrow 0}\frac{1}{\tau}\Big(E^{s,x}f(X_{s+\tau})-E^{s,x}f(X_s)\Big).$$

2. 设$(X_n)_{n\geq 0}$是i.i.d的随机变量序列，X_0的密度函数为$p(x)$，$(\xi_t)_{t\geq 0}$是与$(X_n)_{n\geq 0}$独立的Poisson过程，其参数为λ。设$Y=\sum_{n=0}^{\xi_t}X_n$，则$(Y_t)_{t\geq 0}$是一个时间齐次的独立增量过程，称为复合Poisson过程。 f为$\mathbb{R}$上充分光滑具有紧支撑的函数，求

$$\lim_{\tau\downarrow 0}\frac{1}{\tau}\Big(E^{s,x}f(Y_{s+\tau})-E^{s,x}f(Y_s)\Big).$$

3. 若$(X_t)_{t\geq 0}$是平稳OU过程,

$$X_t=\frac{\sqrt{c}B_{e^{2\beta t}}}{e^{\beta t}},$$

其中$(B_t)_{t\geq 0}$是标准布朗运动。f为$\mathbb{R}$上充分光滑具有紧支撑的函数，求

$$\lim_{\tau\downarrow 0}\frac{1}{\tau}\Big(E^{s,x}f(X_{s+\tau})-E^{s,x}f(X_s)\Big).$$

16 5月5日

1. 阅读课本p72-78的内容。

2. 设$(B_t)_{t\geq 0}$是一维Brown运动。设$[s_1, s_2]$的2^n等分点为

$$s_1 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{2^n}^{(n)} = s_2.$$

设$1 \leq p < \infty$，$\Delta B_{t_k^{(n)}} = B_{t_{k+1}^{(n)}} - B_{t_k^{(n)}}$。请讨论$\sum_{k=0}^{2^n-1} \left|\Delta B_{t_k^{(n)}}\right|^p$的敛散性。

17 5月10日

1. 设$(B_t)_{t\geq 0}$是一维标准Brown运动，$0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_{N_n}^{(n)}=T$是$[0,T]$的划分，$\lambda_n=\max_i\{t_{i+1}^{(n)}-t_i^{(n)}\}$.

   (a) 设
$$\tilde{\phi}_t^{(n)}=\sum_k B_{t_{k+1}^{(n)}}\mathbf{1}_{(t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)}]}(t).$$
$$H_n^{\tilde{\phi}}\equiv\sum_k B_{t_{k+1}^{(n)}}\Delta B_{t_k^{(n)}}=\sum_{k=0}^{N_n-1}B_{t_{k+1}^{(n)}}\big(B_{t_{k+1}^{(n)}}-B_{t_k^{(n)}}\big),$$
   证明：当$\lambda_n\to 0$时
$$H_n^{\tilde{\phi}}\xrightarrow{L^2}\frac{1}{2}B_t^2+\frac{1}{2}t.$$

   (b) 设
$$\Psi_t^{(n)}=\sum_{k=0}^{N_n-1}\frac{B_{t_k^{(n)}}+B_{t_{k+1}^{(n)}}}{2}\mathbf{1}_{(t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)}]}(t),$$
   证明：当$\lambda_n\to 0$时
$$H_n^{\Psi}\equiv\sum_{k=0}^{N_n-1}\frac{B_{t_k^{(n)}}+B_{t_{k+1}^{(n)}}}{2}\Delta B_{t_k^{(n)}}\xrightarrow{L^2}\frac{1}{2}B_t^2.$$

   (c) 设
$$\xi_t^{(n)}=\sum_{k=0}^{N_n-1}B_{\frac{t_k^{(n)}+t_{k+1}^{(n)}}{2}}\mathbf{1}_{(t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)}]}(t),$$
   证明：当$\lambda_n\to 0$时
$$H_n^{\xi}\equiv\sum_{k=0}^{N_n-1}B_{\frac{t_k^{(n)}+t_{k+1}^{(n)}}{2}}\Delta B_{t_k^{(n)}}\xrightarrow{L^2}\frac{1}{2}B_t^2.$$

2. 设$\phi\in\mathscr{L}_T^2$时，证明：$\big\{\xi_t\overset{\text{def}}{=}\int_0^t\phi_s dB_s\big\}$是$(\mathcal{F}_t^B)_{t\in[0,T]}$ 鞅。

3. 设ϕ是可料阶梯(梯形)过程时，证明：$\big\{\eta_t\overset{\text{def}}{=}(\int_0^t\phi_s dB_s)^2-\int_0^t\phi_s^2 ds\big\}$是$(\mathcal{F}_t^B)_{t\in[0,T]}$鞅，且
$$E\Big[\big(\int_s^t\phi_u dB_u\big)^2\Big|\mathcal{F}_s^B\Big]=E\Big[\int_s^t\phi_u^2 du\Big|\mathcal{F}_s^B\Big].$$

18 5月17日

1. (即课本第99页习题9)

   判别下列是否为鞅(需要证明): $t^2B_t - 2\int_0^t sdB_s$, $B_t^3 - 3tB_t$.

2. (即课本第99页第13题)

   设$(B_t)_{t\geq 0}$是一维标准布朗运动，设$g_k(t) = E|B_t^k|, k = 0, 1, 2\cdots$。利用Itô 公式证明

   $$g_k(t) = \frac{1}{2}k(k-1)\int_0^t g_{k-2}(s)ds, \quad k \geq 2.$$

   并于此计算$E(|B_t|^k)$, $k = 1, 2\cdots$.

   (**提示:** $f(x) = |x|^k, k = 3, 4, \cdots$是二次连续可微的)

3. 设$c, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$是常数，$\mathbf{B}_t = (B_t^{(1)}, \cdots, B_t^{(n)})$是$n$-维布朗运动

   $$X_t = \exp\Big(ct + \sum_{j=1}^n \alpha_j B_t^{(j)}\Big).$$

   证明:

   $$dX_t = \big(c + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \alpha_j^2\big)X_t dt + X_t\big(\sum_{j=1}^n \alpha_j dB_t^{(j)}\big).$$

19 5月19日

1. (即课本第99页第10题, 但请注意与课本上题目的不同) 设$(B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$是二维布朗运动，$(B_0^{(1)})^2 + (B_0^{(2)})^2 \neq 0$. 判断$(B_t^{(1)} B_t^{(2)})_{t\geq 0}$ 与$\left(\ln\left[(B_t^{(1)})^2 + (B_t^{(2)})^2\right]\right)_{t\geq 0}$是否是$(\mathcal{F}_t^{\mathbf{B}})_{t\geq 0}$鞅，是否是$(\mathcal{F}_t^{\mathbf{B}})_{t\geq 0}$局部鞅，并请写出你的判断的数学证明。

2. 设
$$dX_t = F(t)X_t dt + C(t)dB_t, \quad X_0 = x_0, \tag{3}$$
其中假设系数在任意有限区间内有界，求解此方程。

3. (即课本第139页第3题,参看课本第110页例6.7的内容)
求证方程
$$d\xi_t = [c(t) + b(t)\xi_t]dt + \sum_{i=1}^{m}[\sigma_i(t) + a_i(t)\xi_t]dB_t^{(i)},$$
$$\xi_0 = \xi_0,$$
的解是
$$\xi_t = F(t)\left[\xi_0 + \int_0^t F(s)^{-1}\left(c(s) - \sum_{i=1}^{m}\sigma_i(s)a_i(s)\right)ds + \int_0^t \sum_{i=1}^{m} F(s)^{-1}\sigma_i(s)dB_s^{(i)}\right],$$
其中
$$F(t) = e^{\int_0^t [b(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m a_i^2(s)]ds + \int_0^t \sum_{i=1}^m a_i(s)dB_s^{(i)}}.$$

20 5月24日

1. (即课本第138页第1题)
   给出一般的形式随机微分方程

$$\frac{d^2\xi_t}{dt^2} = -\lambda^2\xi_t - b\frac{d\xi_t}{dt} + \sigma\dot{B}_t,$$

$$\xi_0 = x,\ \frac{d\xi_t}{dt}\mid_{t=0} = v_0,$$

   严格的数学形式，并求显式解.

2. (课本第139页第5题)
   求解方程$d\xi_t = -\frac{1}{2}e^{-2\xi_t}dt + e^{-\xi_t}dB_t$,并证明它在一个有限的随机时间爆炸.

3. (课本第139页第8题)
   证明方程

$$\begin{aligned} d\xi_t &= -\frac{1}{2}\xi_t dt - \eta_t dB_t, \\ d\eta_t &= -\frac{1}{2}\eta_t dt + \xi_t dB_t. \end{aligned}$$

   有解$(\xi_t, \eta_t) = (\cos B_t, \sin B_t)$. 而且其任意一个解满足$\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2} = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}$.

4. (课本第139页第11题)
   对于光滑函数$\sigma(x)$,证明$g(B_t)$是方程

$$\begin{aligned} d\xi_t &= \frac{1}{2}\sigma'(\xi_t)\sigma(\xi_t)dt + \sigma(\xi_t)dB_t, \\ \xi_0 &= 0. \end{aligned}$$

   的解，其中$g(x)$是函数$\int_0^x \frac{du}{\sigma(u)}$的反函数。

21 5月31日

1. 请写出OU方程，Black-Scholes方程的Kolmogorov向前，向后方程。
2. 设$(\xi_t)_{t\geq 0}$是一个2-维扩散过程，

$$d\xi_t = \mathbf{b}(t,\xi_t)dt + \Sigma(t,\xi_t)d\mathbf{B}_t,$$

其中

$$\mathbf{b}(t,x) = \begin{pmatrix} b_1(t,x) \\ b_2(t,x) \end{pmatrix}, \quad \Sigma(t,x) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(t,x) & \sigma_{12}(t,x) \\ \sigma_{21}(t,x) & \sigma_{22}(t,x) \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

请形式的推导ξ_t应该满足的Kolmogorov向前，向后方程。

3. 请写出随机调和振子的Kolmogorov向前，向后方程。

22 6月2日

1. (课本第163页第2题)
   假定$u(t,x)$满足向后方程
   $$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$
   证明: $Eu(t,B_t)=u(0,0)$.

2. (课本第164页第4题)
   求一维终值问题
   $$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\\ u(T,x)=f(x)\end{cases}$$
   的解$u(t,x)$, $0\le t\le T$, 再将结果推广至多维。

3. 设$U(x):\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$是光滑函数，满足$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{U(x)}{\epsilon}}dx<\infty$，
   $$dX_t=-\nabla U(X_t)dt+\sqrt{2\epsilon}d\mathbf{B}_t.$$
   求：X_t的不变概率测度(或者不变概率密度)，并证明你的结论。其中，$\mathbf{B}$是n-维标准布朗运动，∇U是U的梯度。

4. 在上题中，进一步假设$\forall 0<\epsilon<1$, $\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{U(x)}{\epsilon}}dx<\infty$, 而且$\lim_{x\to\infty}U(x)=+\infty$. $A=\{x:U(x)=\inf_{y\in\mathbb{R}^n}U(y)\}$, 设$A$只有有限个点。令
   $$\pi_\epsilon(x)=Z_\epsilon^{-1}e^{-\frac{U(x)}{\epsilon}},\quad Z_\epsilon=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{U(x)}{\epsilon}}dx$$
   证明：对于任意有界开集O,若$A\subset O$,当$\epsilon\to 0$时，
   $$\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_O(x)\pi_\epsilon(x)dx\to 1.$$

5. 设n-维扩散过程$(\xi_t)_{t\ge 0}$满足
   $$d\xi_t=\mathbf{b}(t,\xi_t)dt+\Sigma(t,\xi_t)d\mathbf{B}_t,\quad (a_{ij})=\Sigma\Sigma^t.$$
   $f\in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, $q(x)$连续有下界。设
   $$v(t,x)=E\Big[\exp\Big(-\int_0^t q(\xi_s)ds\Big)f(\xi_t)\Big|\xi_0=x\Big].$$
   若已经验证$v(t+\Delta,x)=E\Big[\exp\Big(-\int_0^\Delta q(\xi_s)ds\Big)v(t,\xi_\Delta)\Big|\xi_0=x\Big]$。形式地证明：
   $$\begin{aligned}&\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}\big[v(t+\Delta,x)-v(t,x)\big]\\ =\ &\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}(t,x)+\sum_{i=1}^j b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(t,x)-q(x)v(t,x).\end{aligned}$$

23 6月7日(提示)

1. 设n-维扩散过程$(\xi_t)_{t\geq 0}$满足

$$d\xi_t = \mathbf{b}(t,\xi_t)dt + \Sigma(t,\xi_t)d\mathbf{B}_t.$$

设$\mathcal{L}_t = \frac{1}{2}\sum_{ij}^n a_{ij}(t,\mathbf{x})\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t,\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i}$, $(a_{ij}) = \Sigma\Sigma^t$. 设$D$为$\mathbb{R}^n$中的有界开区域。若方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}_t u = 0, & \mathbf{x}\in D, \quad t\leq T, \\ u(T,\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x}\in D \\ u(t,\mathbf{x}) = 1, & \mathbf{x}\in \partial D, \quad s\leq t\leq T \end{cases},$$

有对t一次连续可微，对$\mathbf{x}$二次连续可微的唯一解。 记$u_T(t,\mathbf{x})$，$\tau_{\mathbf{x}} = \inf\{t > 0,\ \xi_t^{\mathbf{x}} \notin D\}$, $\mathbf{x}\in D$. 证明:

$$P(\tau_x < T) = u_T(s,\mathbf{x}).$$

提示：参看教材第156-157页问题2(定理7.13)及其证明以及第157页的注

2. 设$\mathbf{B}_t$是n维布朗运动，$B(0,R) = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x\| < R\}$. 设$x\in\mathbb{R}^n$, $\tau_x = \inf\{t > 0, \mathbf{B}_0 = x, \mathbf{B}_t \notin B(0,R)\}$. 求$B_{\tau_x}$的分布。

可以参考周蜀林老师编著的《偏微分方程》(北大出版社)第50-53页的内容.

提示：参看教材第158页问题1(定理7.14)和问题2(定理7.15)，再求解定理7.15中的偏微分方程.这个偏微分方程的显式解可以用球面上的Poisson核表示出来，这就是周老师书上第53页的定理2.18