应用随机分析课程介绍

课程名称: 应用随机分析 (Applied Stochastic Calculus, Applied Stochastic Analysis)

授课对象: 本研合上课程; 数学学院本科生; 概率论、统计学、金融数学和应用数学专业的研究生和博士生; 其他专业具有较好数学基础的研究生.

先修课程: 概率论、应用随机过程. **注意, 并不要求先修测度论**, 当然如果先修了实变函数或者实变与泛函更好.

教学目的: 培养学生借助随机分析 (或者称为随机微积分) 的思想和方法建立数学模型, 并利用随机分析的理论和工具分析与解决问题的初步能力. 尽可能用 "初等方法", 借助较少的高深数学工具将随机分析的思想介绍给学生; 强调概率直观的培养, 不刻意追求数学上的严格性; 课程着重通过大量来自不同领域的实际例子加深学生对课程中重要概念、结论和思想方法的理解.

课程介绍与说明:

我们在概率论和应用随机过程这两门课程中主要是学习了一些特殊的过程, 例如: 随机游动、泊松过程、布朗运动等. 那么, 对于更为一般的随时间演化的随机现象, 也就是随机过程, 我们该如何来研究呢？

作一个简单的类比, 我们学过的概率论和应用随机过程就相当于在中学时学的一些数学知识; 而我们进入大学所学的微积分, 就相当于 "应用随机分析" 或者称为 "随机微积分"(Stochastic Calculus).

具体说, 中学数学学的函数其实主要就是几个初等函数, 线性函数、三角函数、指数函数、对数函数、二次函数等. 虽然这些函数非常重要, 但我们利用这些函数所能直接描述的实际问题还是很有限的. 例如: 我们在中学物理中最多只能对加速度为常数的质点运动进行较好的研究 (*其实它的位移公式本身是利用了微积分的思想得到的*). 而学习了微积分之后, 我们就可以对一般的 "好 (光滑) " 函数进行研究了, 可以研究的问题和领域大大地扩展了, 从天体的运动到生物物种之间竞争的模型 (常微分方程); 从热传导到琴弦的振动 (偏微分方程), 从曲线、曲面上的微分几何到微分流形⋯⋯, 这中间最主要的是有了微分、积分的概念和牛顿-莱布尼兹公式.

应用随机过程这门课程何尝不是这样呢？虽然我们所学的随机游动、泊松过程和布朗运动这些具体的过程非常有趣、重要，但利用这些过程直接描述的随机过程并不是太多, 例如: 就连 Ornstein-Unlenbeck 过程这种极其重要的平稳、马氏、高斯过程也只能在**应用随机过程**课本的最后几页用布朗运动的某种时-空尺度变换得到 (*参见:《应用随机过程》118 页, 高等教育出版社，钱敏平、龚光鲁、陈大岳、章复熹编著*). 然而在**应用随机分析**课程中, Ornstein-Unlenbeck 过程可以很容易的定义, 而且可以给出具有很强物理意义的直观解释.

那么, 应用随机分析或者说随机微积分是怎样的一门课程? 实际它就是告诉我们, 在随机世界中, 我们如何类比于牛顿-莱布尼兹建立微积分的基本想法来定义 "随机微分"、

随机积分和随机版本的牛顿-莱布尼兹公式, 也就是著名的 Itô 公式 (伊藤公式), 进而建立随机微分方程 (Stochastic Differential Equation). 由此我们就可以描述随机世界的众多现象，从花粉粒子在液体中的运动 (布朗运动、Ornstein-Unlenbeck 过程和 Langevin 方程) 到金融数学中的 Black-Scholes 模型, 从工程领域的滤波理论到生物化学的酶动力学模型等等.

具体地说, 应用随机分析这门课程要讲授的具体内容以及它们之间的逻辑线索应该是什么？

首先, 我们需要回答一个基本问题: 在数学上应该如何理解 (定义) 什么是随机过程的 “随机性”? 人们总是希望通过 (过去和现在) 已知的信息或条件来预测 “未来”. 因此所谓 “随机性” 可以理解为 “不可预测性”. 那么, 自然要问什么是 “预测”? 其实, 这很简单, 就是 “条件数学期望”, 也就是说当我们已知某个或某些随机变量时, 另一个随机变量在此条件下的期望是多少或者分布是什么，也可以理解为在此条件下的 “预测, 预估” 是多少. 因此，我们首先要定义”条件数学期望”, 并学会如何计算它. 此处的这个概念与 (初等) 概率论，应用随机过程条件期望既有区别又有联系. 而严格的定义要用到测度论的知识, 在应用随机分析课程中对这一概念的引入又比测度论中的直观简单.

对某个随机过程, 我们用 “条件数学期望” 作为 “预测” 方法在每一时刻针对其 “未来” 的预测结果都是 “完全不可预测” 时，这个过程就是 “纯随机” 的, 被称为 “鞅”, 这种随机性就是 “鞅性”.

因此, 接下来的问题是对于一个随机过程，我们如何 “提取” 出它的 “鞅性”, 也就是它的 “纯随机性” 或者 “完全不可预测性”. 这就是 Doob(-Meyer) 分解定理. 这个定理告诉我们一大类过程, 例如 Itô 过程类, 都可以表示成鞅加上一个 “可预测” 的随机过程. 而事实上, 这个 “可预测” 的随机过程往往可以用黎曼积分等工具来处理.

“鞅” 是一个抽象的概念, 那么紧接着一个自然的问题就是鞅是否可以用我们已知的一些 “初等”、“简单”、“特殊” 的过程把它**线性表示**出来, 以便我们研究其具体的性质, 这就是随机积分. 例如：关于布朗运动、泊松点过程的随机积分. 有了随机积分之后, 就要有关于随机积分的计算公式, 这就是 Ito 公式, 它相当于微积分中的牛顿-莱布尼兹公式. Itô 本人就把这个公式称为具有随机风味的牛顿-莱布尼兹公式.

有了这些准备之后, 我们就能对一大类可分解成 “鞅”+“可预测” 随机过程的过程类进行比较具体的研究了, 特别是对随机微分方程和扩散过程进行细致研究, 得到一些有趣重要的结论. 而我们在其它学科中遇到的很多随机现象都可以用随机微分方程来建模.

这就是**应用随机分析**这门课的逻辑主线和教学内容.

至于鞅、随机积分、随机微分方程更加深刻和抽象的理论, 我们将在**随机分析** (Stochastic Analysis) 课程中讲解.