布朗运动

应用随机过程补充讲义之四

1 布朗运动的基本性质

1827 年植物学家 Robert Brown 向英国皇家学会报告了他在显微镜下观察到的奇怪现象：漂浮在液体表面的花粉在毫无规律的随机移动. 后来这现象被命名为布朗运动. 1905 年，瑞士专利局的年轻职员 Einstein 发表了 5 篇文章，其中一篇是关于狭义相对论的，另一篇则给出了布朗运动的物理解释. 在此之前的 1900 年，法国 Bachilier 在著名数学家 Poincare 指导下完成了他的博士论文，是有关巴黎股市的数学理论，他把股价变化成功地解释为布朗运动，分析了布朗运动的一些特性. 但他的文章发表在经济类的杂志上，没有在数学界产生应有的影响. 很多年以后才被人注意到，今天世界性的金融数学学会就以他的名字命名. 1923 年，连作为 MIT 讲师的资格都还有点问题的 Robert Wiener 给出了布朗运动的严格数学基础，他提出了一个概率空间，用来定义布朗运动，后人称为 Wiener 空间. 这项研究工作恐怕是美国本土产生的第一个有世界水平的数学研究成果. 二次世界大战期间，日本学者 Kakutani 等人被赶出美国，在饥饿困顿中发现了布朗运动与牛顿位势之间的联系，他的同事 Ito 则提出来有关布朗运动的一套计算理论，被称为是 Ito 积分. 之后布朗运动的研究者纷至沓来，有关文献汗牛充栋，其中尤以法国的 Paul Levy 的工作最丰富最深刻.

按照 Einstein 的解释，花粉是受到液体分子的不断碰撞，而液体分子本身在做不规则的运动. 若以 X_t 表示经过时间 t 之后花粉的位移，则

1. X_t 是二维随机向量，在各个方向的投影具有相同的分布；
2. $X_{t+s} - X_t$ 与 X_t 相互独立，与 X_s 具有相同分布；
3. X_t 关于 t 连续.

由此可以得出 X_t 服从正态分布， $E|X_t|^2 = at$. 数学家在此基础上给出布朗运动的定义：$\{B_t, t \geq 0\}$ 是一族定义在同一概率空间上的随机变量，满足以下三条要求.

1. $B_{t+s} - B_t$ 服从正态分布 $N(0, \sigma^2 s)$;
2. 对任意 $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots < s_n < t_n$, $B(t_1) - B(s_1)$, $B(t_2) - B(s_2)$, $\cdots, B(t_n) - B(s_n)$ 相互独立；（出于排版的考虑，有时把 B_t 写为 $B(t)$.）
3. 对几乎所有 ω, $B_t(\omega)$ 关于 t 连续.

如无特别声明，通常取 $\sigma^2 = 1$, 相应的过程称为标准布朗运动.

显然，定义中的第三条要求并不能由前两条推出. 但这三条要求是相容的，即，满足这三条要求的一族随机变量的确存在. 这里样本空间 Ω 可以取 $C[0, \infty)$, 这是一个很大的空间. 关键是要在此空间找一个恰当的 σ- 代数和相应的概率测度. 这项工作由 Wiener 完成，故称该测度为 Wiener 测度；称相应的概率空间为 Wiener 空间. 有时也以 W_t 来表示布朗运动.

这里所讨论的布朗运动是一维的，但不难将此推广到高维去. 设 $B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \cdots, B_t^{(n)}$ 是 n 个相互独立的标准布朗运动，把它们排在一起称为向量， $(B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \cdots, B_t^{(n)})$, 就

得到一个 n 维布朗运动，如果每个分量除以 $\sqrt{n}$, 则成为标准的 n 维布朗运动. 如果把 n 维布朗运动投影到 n 维欧氏空间的球面上，就得到 $n-1$ 维球面上的布朗运动. 还可以在一般流形上定义布朗运动.

命题 1. $Cov(B_t, B_s) = \min(t, s)$.

证明. 因为协方差使对称的，不妨设 $t > s$, 则 $B_t = (B_t - B_s) + B_s$. 根据定义 $(B_t - B_s)$ 与 B_s 独立.

$$\begin{aligned} Cov(B_t, B_s) &= Cov(B_t - B_s, B_s) + Cov(B_s, B_s) \\ &= 0 + Var(B_s) = s = \min(t, s). \end{aligned}$$

命题 2. 对任意一组非负实数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, $\{B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_n}\}$ 的联合分布是 n 维正态分布.

证明.

命题 3. 设随机过程 $\{\xi_t; t \geq 0\}$ 具有以下两条性质：

1) 对任意一组非负实数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$, $\{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \cdots, \xi_{t_n}\}$ 的联合分布是 n 维正态分布.

2) $Cov(\xi_t, \xi_s) = \min(t, s)$.

则 $\xi_{t+s} - \xi_t$ 与 ξ_t 相互独立;

证明.

命题 4. 对任意 $a > 0$, 令 $W_t = \frac{1}{a} B_{a^2 t}$, $U_t = t B_{1/t}$, 则 $\{W_t\}$ 和 $\{U_t\}$ 都是标准布朗运动.

证明.

布朗运动的转移密度函数 $p_t(x, y)$ 称为热核. 不难验证

$$\frac{\partial p_t(x,y)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_t(x,y)}{\partial^2 x} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_t(x,y)}{\partial^2 y}.$$

定义 $G(x, y) = \int_t p_t(x, y)dt$, 称为格林函数 (Green function). 可以验证，当维数 $d = 1, 2$ 时，积分是发散的；而当维数 $d \geq 3$ 时，

$$G(x,y) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{2\pi^{d/2}} \frac{1}{|x-y|^{d-2}}.$$

忽略前面的系数，这正是物理中的牛顿位势. 这决定了布朗运动的常返 / 非常返. 对函数 f, 定义函数 $P_t f$, 新函数在 x 点的取值 $P_t f(x) = \int f(y) p_t(x, y)dy$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{P_t f - f}{t} = \frac{1}{2}\Delta f.$$

其中 $\Delta = \sum_i \partial^2 / \partial^2 y_i$ 是 Laplace 算子.

2 不变原理

概率论的精彩高潮是中心极限定理．对于随机过程也有类似的结论，叫做不变原理，适用的范围很大，这里只讨论最特殊的情况，简单随机游动经过适当的时间 / 空间变换，在一定意义下收敛于布朗游动．

设 $\{S_n\}$ 是一维简单随机游动．当 $n < t < n+1$ 时，定义 S_t 为 S_n 和 S_{n+1} 之间的线性插值．选定正数 $a > 0$,

$$Y_a(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}} S_{at}(\omega);$$

与 S_n 相比，空间压缩了 $\sqrt{a}$ 倍，而时间增加了 a 倍． 这样得到一条随机曲线 $Y_a(\cdot,\omega)$. 它是连续的，即

$$Y_a(\cdot,\omega) \in C[0,\infty).$$

简单随机游动 $\{S_n\}$ 诱导了 $C[0,\infty)$ 空间上的一个概率测度 μ_a, 当 a 越来越大时， μ_a 也越来说接近 Wiener 测度．

但这样的提法有点玄乎．我们甚至不太了解 Wiener 测度，“越来越接近”也需要准确定义．回忆中心极限定理， $S_n/\sqrt{n}$ 依分布收敛于服从标准正态分布的随机变量，即，对任意连续有界函数 f,

$$Ef(S_n/\sqrt{n}) \to \int f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{1}$$

相应的我们可以定义 $\mathbf{f}$ 是从 $C[0,\infty)$ 到实数 R 的映照，由于自变量已是函数，故称这映照 $\mathbf{f}$ 为泛函，以示区别．如果存在常数 M, 对任何 $g \in C[0,\infty)$, $|\mathbf{f}(g)| < M$, 就称 $\mathbf{f}$ 为有界泛函．如果对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任何 $g, h \in C[0,\infty)$, 若 $||g-h|| \le \delta$, 就有 $|\mathbf{f}(g) - \mathbf{f}(h)| < \epsilon$, 则称泛函 $\mathbf{f}$ 是连续的．其中 $||\cdot||$ 是函数的最大模，即 $||g|| = \sup_x |g(x)|$.

例如，取定 x, $\mathbf{f}(g) = g(x)$ 就是一个连续泛函．如果定义

$$\mathbf{f}_M(g) = \begin{cases} g(x) & \text{若 } -M < g(x) < M, \\ M & \text{若 } g(x) \ge M \\ -M & \text{若 } g(x) \le -M. \end{cases}$$

则 $\mathbf{f}_M$ 是一个连续有界泛函，可用之逼近 $\mathbf{f}$.

命题 5(不变原理)．对任何 $C[0,\infty)$ 上有界连续泛函 $\mathbf{f}$

$$\lim_{a\to\infty} E\mathbf{f}(Y_a(\cdot,\omega)) = E\mathbf{f}(B.(\omega)).$$

等式左边的数学期望是关于随机游动取的，而右边的数学期望世关于布朗运动取的，即关于 Wiener 测度的积分．我们对 Wiener 测度还不了解，但它的有限维分布是可以计算的．

例．取

$$\mathbf{f}(g) = \begin{cases} f(g(1)) & \text{若 } -M \le g(1) \le M, \\ 0 & \text{若 } |g(1)| > M. \end{cases}$$

则 $\mathbf{f}$ 是 $C[0,\infty)$ 上有界连续泛函. 应用不变原理,

$$\lim_{a\to\infty} Ef(\frac{S_a}{\sqrt{a}})1_{\{|S_a/\sqrt{a}|\le M\}} = Ef(B_1)1_{\{|B_1|\le M\}} = \int_{-M}^{M} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

再令 $M\to\infty$, 就得到 (1) 式, 可见不变原理包含中心极限定理.

在很多场合, 关于布朗运动的一些随机变量的分布倒是比较容易计算的, 我们利用不变原理来推测随机游动. 也可以反过来.

命题 5. (反正弦律). 对于标准布朗运动, 定义 $\sigma(\omega)=\sup\{t\le 1, B_t(\omega)=0\}$, 则

$$P(\sigma\le\delta)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\delta}.$$

证明. 取 $C[0,\infty)$ 上有界连续泛函

$$\mathbf{f}(g)=\sup\{t\le 1, g(t)=0\},\quad \forall g\in C[0,\infty).$$

对于布朗运动,

$$\mathbf{f}(B.(\omega))=\sup\{t\le 1, B_t(\omega)=0\}=\sigma(\omega)$$

对于随机游动,

$$\mathbf{f}(Y_{2n}(\cdot,\omega))=\max\{k\le 2n, S_k(\omega)=0\}=\sigma_n(\omega).$$

我们在第一章已经分析了 $\sigma_n(\omega)$ 的分布. 取一族连续函数 f_m 来逼近 $f(x)=1_{\{x\le\delta\}}$. 根据不变原理

$$\lim_{n\to\infty} Ef_m(\mathbf{f}(Y_{2n}(\cdot,\omega)))=Ef_m(\mathbf{f}(B.(\omega))).$$

由此推出

$$\begin{aligned} & P(\sigma\le\delta)=Ef(\sigma(\omega))=Ef(\mathbf{f}(B.(\omega))) \\ = & \lim_{n\to\infty} Ef(\mathbf{f}(Y_{2n}(\cdot,\omega))) \\ = & \lim_{n\to\infty} Ef(\sigma_n(\omega))=\lim_{n\to\infty}P(\sigma_n\le 2\delta n) \\ = & \lim_{n\to\infty} P(S_{2l}\ne 0, \delta n<l\le n) \\ = & \lim_{n\to\infty}\sum_{l=1}^{\delta n}\frac{1}{\pi\sqrt{l}\sqrt{n-l}} \\ = & \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{1}{\sqrt{x(l-x)}}dx=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\delta}. \end{aligned}$$

设 $\tau_1=\inf\{t;B_t=1\}$, 表示布朗运动首次到达 1 的时刻. 设 $\sigma_n=\inf\{m;S_m=n\}$, 表示随机游动首次到达 n 的时刻.

$$P_0(\tau\le b)=\lim_{n\to\infty}P(\sigma_{2n}\le 4bn^2)=\lim_{n\to\infty}\sum_{l=n}^{2bn^2}\frac{2n}{2l}C_{2l}^{n+l}\frac{1}{2^{2l}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{l=n}^{2bn^2} \frac{l^{2l}}{(n+l)^{(n+1)}(l-n)^{(l-n)}} \frac{n}{\sqrt{\pi}\sqrt{l}\sqrt{(n+l)(l-n)}}$$

$$= \int_0^{2b} e^{-1/y} \frac{1}{\sqrt{\pi y} y} dy = \int_{1/2b}^{\infty} e^{-x} \frac{1}{\sqrt{x\pi}} dx.$$

最大模 $M_t = \max_{0\leq s\leq t} B_s$.

$$P(M_t \leq y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{y}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{v^2}{2t}} dv.$$

$EM_t = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$.

不变原理使我们相信随机游动和布朗运动之间的对应关系．两者有许多相似的结论，有些尽管不能用不变原理相互推导，我们依然可以看出其中的联系．例如重对数律，对于简单随机游动，苏联数学家辛钦得到了极其漂亮的估计．

$$\limsup_n \frac{S_n}{\sqrt{2n \log\log n}} = 1; \quad a.s.$$

$$\liminf_n \frac{S_n}{\sqrt{2n \log\log n}} = -1. \quad a.s.$$

同样道理，对于一维布朗运动，重对数律也成立．

$$\limsup_n \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log t}} = 1; \quad a.s.$$

$$\liminf_n \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log t}} = -1. \quad a.s.$$

一个简单的推论是一维布朗运动是常返的，即对几乎所有 ω, $\{t; B_t(\omega) = 0\}$ 包含一个大于任意事先指定常数的数．

3 轨道性质

令 $Y_s = \sup_{0\leq t\leq s} B_t$. 由布朗运动的 scaling 性质，

$$P(Y_s \leq b) = P(\sup_{0\leq t\leq s} B_t \leq b) = P(\sup_{0\leq t\leq s/b^2} B_t \leq 1) = P(\tau_1 > s/b^2)$$

$$= \int_0^{b^2/(2s)} e^{-x} \frac{1}{\sqrt{x\pi}} dx = \int_0^{b/\sqrt{s}} e^{-x^2/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} dx.$$

显然 Y_s 是连续型的，其密度函数为 $e^{-b^2/2s}2/\sqrt{2\pi s}$ $P(Y_s=a)=0$.

命题 5. $P(\exists t_1<t_2<1; B_{t_1}=B_{t_2}=\sup_{0\le t\le 1}B_t)=0$.

证明. 取有理数 r, 令 $Y_t=B_{t+r}-B_r$, $W_s=B_{r-s}-B_r$, $s\le r$, 则 W 和 Y 是独立的标准布朗运动.

$$
\begin{aligned}
& P(\exists t_1<t_2<1; B_{t_1}=B_{t_2}=\sup_{0\le t\le 1}B_t) \\
\le & \sum_{r\text{ 有理}} P(\exists t_1<r<t_2<1; B_{t_1}=B_{t_2}=\sup_{0\le t\le 1}B_t) \\
= & \sum_r P(\sup_{0\le t\le r}B_t=\sup_{r\le t\le 1}B_t) \\
= & \sum_r P(\sup_{0\le t\le r}W_t=\sup_{0\le t\le 1-r}Y_t) \\
= & \sum_r \int P(\sup_{0\le t\le r}B_t=x)e^{-\frac{x^2}{2(1-r)}}\frac{2}{\sqrt{2\pi(1-r)}}dx \\
= & 0.
\end{aligned}
$$

设 $\tau_A=\inf\{t;B_t\in A\}$, 表示布朗运动首次到达 A 的时刻. 当 A 是欧氏空间的一个区域时， τ_A 有很好的性质. $W_t=B_{t+\tau_A}-B_{\tau_A}$ 是布朗运动，称为强马氏性. 因此反射原理依然可用

$$P(B_1<a,\sup_{0\le t\le 1}B_t>a)=P(B_1>a,\sup_{0\le t\le 1}B_t>a)=P(B_1>a).$$

$$P(\sup_{0\le t\le 1}B_t>a)=P(B_1>a)+P(B_1<a,\sup_{0\le t\le 1}B_t>a)=2P(B_1>a).$$

这里我们忽略了 $\{B_1=a\}$ 这样零概率事件. 对于连续型随机变量，我们可以如此处理.

布朗运动有许多美妙的性质.

命题 6. $\{t\le 1;B_t=0\}$ 是完全闭集. 证明.

命题 7. 布朗运动的 Wald 引理， $0<x<b$

$$P_x(\tau_0>\tau_b)=x/b.$$

证明.

命题 8. 对几乎所有的 ω, $B_t(\omega)$ 在几乎所有的 t 不是 Lipschitz 连续的，因此几乎处处不可微.

证明. 取定常数 C, 令

$$\begin{aligned}
A_n &= \{\omega;\ \exists s\in[0,1], |B_t-B_s<C|t-s|\text{for}|t-s|<\frac{3}{n}\}\\
Y_{k,n} &= \max\{|B(\frac{k+j}{n})-B(\frac{k+j-1}{n})|, j=0,1,2\}\\
B_n &= \{\exists k, Y_{k,n}\le\frac{5C}{n}\}
\end{aligned}$$

则 $A_n\subset B_n$

$$P(Y_{k,n}\le\frac{5C}{n})=[P(|B(\frac{1}{n})\le\frac{5C}{n})]^3=[P(|B(1)\le\frac{5C}{\sqrt{n}})]^3=(2\Phi(\frac{5C}{\sqrt{n}})-1)^3$$

$$P(A_n)\le P(B_n)\le nP(Y_{k,n}\le\frac{5C}{n})\approx\frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{10C}{\sqrt{2\pi}})^3\to 0.$$

命题 9. 令 $\Delta_{m,n}=B(\frac{tm}{2^n})-B(\frac{t(m-1)}{2^n})$. 则 $E|\sum_{m=1}^{2^n}\Delta_{m,n}^2-t|^2\to 0$.

证明.

$$\begin{aligned}
&E|\sum_{m=1}^{2^n}\Delta_{m,n}^2-t|^2\\
=\ & E(\sum_{m=1}^{2^n}[\left[B(\frac{tm}{2^n})-B(\frac{t(m-1)}{2^n})\right]^2-\frac{t}{2^n}])^2\\
=\ & E\sum_{m=1}^{2^n}[\left[B(\frac{tm}{2^n})-B(\frac{t(m-1)}{2^n})\right]^2-\frac{t}{2^n}]^2\\
&+E\sum_{j\neq m}[\left[B(\frac{tm}{2^n})-B(\frac{t(m-1)}{2^n})\right]^2-\frac{t}{2^n}][\left[B(\frac{tj}{2^n})-B(\frac{t(j-1)}{2^n})\right]^2-\frac{t}{2^n}]\\
=\ & \sum_{m=1}^{2^n}E[\left[B(\frac{t}{2^n})\right]^2-\frac{t}{2^n}]^2\\
=\ & 2^n\left[E(B(\frac{t}{2^n}))^4-2\frac{t}{2^n}E\left[B(\frac{t}{2^n})\right]^2+2\frac{t^2}{2^{2n}}\right]\\
=\ & 2^n(3\frac{t^2}{2^{2n}}-2\frac{t^2}{2^{2n}}+\frac{t^2}{2^{2n}})=2\frac{t^2}{2^n}\to 0
\end{aligned}$$

Wald 引理, 设 B_t 是一维标准布朗运动, $B_0=0$, $a<0<b$, $\tau=\inf\{t;B_t=-a$ 或 $b\}$. 则

$$E_0 B_\tau = 0; \quad E_0 B_\tau^2 = E_0 \tau.$$

布朗运动的嵌入链式随机游动， Skorohod 定理

强马氏性

警察抓小偷

4 位势理论

引理 14. 设 B_t 是标准一维布朗运动， $\tau_h = \inf\{t; |B_t| = h\}$.

1) $E_0 \tau_h = h^2$.

2) $E_0 \tau_h^2 = \frac{5}{3} h^4$.

3) $E_0 e^{\theta \tau_h} < \infty$ for some $\theta > 0$.

4) $\lim_{h\to 0} E_0 e^{\theta \tau_h} = 1$.

考虑一维布朗运动， $\tau = \inf\{t; B_t = 0$ 或 $1\}$.

命题 15. $\phi(x) = aP_x(B_\tau = 0) + bP(B_\tau = 1) = E_x f(B_\tau)$ 是下列调和方程及其边界条件的解.

$$f''(x) = 0, 0 < x < 1; \quad f(0) = a,\ f(1) = b.$$

证明. 对于 $x \in (0,1)$, 取中心为 x 的小区间 $(x-\delta, x+\delta)$ 使之完全落在 $(0,1)$ 中. 再令 $\sigma = \inf\{t, B_t \notin (x-\delta, x+\delta)\}$, 若 $B_0 = x$, 则 B_σ 落在 $x-\delta$ 和 $x+\delta$ 的概率相同. 由布朗运动的强马氏性,

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(\phi(x-\delta) + \phi(x+\delta)).$$

这说明 $\phi(x)$ 是调和函数 (线性函数). 还需要证明, 对于 $y = 0$ 或 1, $\lim_{x\to y} \phi(x) = f(y)$. 这等价于 $\lim_{x\to 0} P_x(\tau_0 < \tau_1) = 1$. 事实上我们由 Wald 引理知 $P_x(\tau_0 < \tau_1) = 1 - x$. 命题得证. ♣

命题 16.

$$\phi(x) = E_x \int_0^\tau f(B_t) dt$$

是下列微分方程的解.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\phi''(x) &= -f(x), \quad x \in (a,b); \\ \phi(a) &= \phi(b) = 0. \end{aligned}$$

其中 f 是 (a,b) 上的连续函数.

证明. 对于 $x \in (a,b)$, 取中心为 x 的小区间 $(x-\delta, x+\delta)$ 使之完全落在 (a,b) 中. 再令 $\sigma = \inf\{t, B_t \notin (x-\delta, x+\delta)\}$, 若 $B_0 = x$, 则 B_σ 落在 $x-\delta$ 和 $x+\delta$ 的概率相同. 由布朗运动的强马氏性,

$$\phi(x) = \frac{1}{2}(\phi(x-\delta) + \phi(x+\delta)) + E_x \int_0^\sigma f(B_t)dt.$$

$$\begin{aligned}
\phi''(x) &= \lim_{\delta\to 0} \frac{\phi(x-\delta) + \phi(x+\delta) - 2\phi(x)}{2\delta^2} \\
&= \lim_{\delta\to 0} \frac{-1}{\delta^2} E_x \int_0^\sigma f(B_t)dt \\
&= \lim_{\delta\to 0} \frac{-1}{\delta^2} \left[f(x)E_x\sigma + E_x \int_0^\sigma (f(B_t) - f(x))dt \right]
\end{aligned}$$

设 $\Delta = \max_{y;|y-x|<\delta} |f(y) - f(x)|$. 由命题 14,$\lim_{\delta\to 0} E_x\sigma/\delta^2 = 1$,

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta^2} |E_x \int_0^\sigma (f(B_t) - f(x))dt| \le \lim_{\delta\to 0} \frac{E_x\sigma}{\delta^2}\Delta \le \Delta \to 0.$$

证毕. ♣

用布朗游动的停时来表示微分方程的解，可以容易到推广到高维去. 并引导人们用更复杂的随机过程来解决更一般的微分方程，例如超过程和非线性微分方程，无穷粒子系统的 hydrodynamic limit, 等等. 这已超出本文讨论的范围.

命题 5. 设 D 是欧氏空间的一个有界区域. ∂D 是其边界. f 是定义在边界 ∂D 的连续函数. 令 $\tau = \inf\{t, B_t \notin D\}$. 则 $g(x) = E_x f(B_\tau)$ 是下列微分方程的解.

$$\begin{aligned}
\Delta g(x) &= 0, \quad x \in D; \\
g(y) &= f(y), \quad y \in \partial D.
\end{aligned}$$

证明. 对于 $x \in D$, 取完全落在区域 D 中、中心为 x 半径为 δ 的小球 $B(x,\delta) \subset D$. 再令 $\sigma = \inf\{t, B_t \notin B(x,\delta)\}$, 若 $B_0 = x$, 则 B_σ 在球 $B(x,\delta)$ 的表面 $S(x,\delta)$ 均匀分布. 由布朗运动的强马氏性,

$$g(x) = \frac{1}{|S(x,\delta)|} \int_{S(x,\delta)} g(u)du.$$

这说明 $g(x)$ 是调和函数. 还需要证明，对于 $y \in \partial D$, $\lim_{x\to y} g(x) = f(y)$. 由 f 的连续性，只需证明下列引理

命题 5. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x-y| < \delta$, $P_x(|B_\tau - y|\epsilon) > 1 - \epsilon$.

命题 5. 令 $\sigma = \inf\{t, B_t \notin B(x,\delta)\}$ 存在 $\epsilon > 0$, 当 $|x-y| < \epsilon$, $P_x(\tau < \sigma) > 1/4$.

5 扩散过程和高斯过程

设 $\{\xi_t, t\geq 0\}$ 是取值于 R^d 的随机过程，如果

$$P(\xi_t\in A|\xi_s=x)=\int_A p_{st}(x,y)dy,$$

则称 $p_{st}(x,y)$ 为转移概率密度函数，简称转移概率. 如果 $p_{st}(x,y)= p_{0,t-s}(x,y)$, 则称过程是时齐的. 通常 $p_{0t}(x,y)$ 就写为 $p_t(x,y)$. 例如，布朗运动就是时齐的.

带漂移的布朗运动 $Z_t=B_t+ct$.

反射布朗运动 $X_t=|B_t|$

布朗桥 $\xi_t=B_t-tB_1, 0\leq t\leq 1$. 布朗桥不是马氏过程.

定义. 如果随机过程 $\{\xi_t\}$ 的任何有限维分布都是正态分布，则称 $\{\xi_t\}$ 为高斯过程.

布朗运动就是高斯过程, 带漂移的布朗运动, 布朗桥和下面介绍的 OU 过程都是高斯过程.

Onstein-Ulenbeck 过程，简称 OU 过程，取 $Z_t=e^{-t}B(e^{2t})$. 则

$$\begin{aligned}
Z(t+s) &= e^{-(s+t)}B(e^{2(s+t)})\\
&= e^{-(s+t)}B(e^{2t})+e^{-(s+t)}(B(e^{2(s+t)})-B(e^{2t})\\
&= e^{-s}Z(t)+Y\sqrt{1-e^{-2s}}.
\end{aligned}$$

其中 Y 是服从标准正态分布的随机变量. 可见过程的转移概率, 在给定 $Z(t)=x$ 条件下, $Z(t+s)$ 服从以 $e^{-s}x$ 为中心，以 $1-e^{-2s}$ 为方差的正态分布，即 $N(e^{-s}x, 1-e^{-2s})$. 转移概率密度函数为

$$p_t(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{2t})}}\exp(-\frac{(y-e^{-t}x)^2}{2(1-e^{2t})}).$$

更一般的形式为

$$p_t(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma(1-e^{2\beta t})}}\exp(-\frac{(y-e^{-\beta t}x)^2}{2\gamma(1-e^{2\beta t})}).$$

这里有两个参数， β 和 γ, 分别称漂移系和扩散系数. OU 过程有不变分布 $N(0,\gamma)$. OU 过程是 Ehrenfest 模型的极限

几何布朗运动 $Y_t=e^{B_t}$. 假设某股票第 k 年的回报率为 α_k, 则经过 n 年后，最初投资 X_0 增加为 $X_n=X_0\prod_{k=1}^n(1+\alpha_k)=X_0e^{\sum_{k=1}^n\xi_k}$, 其中 $\xi_k=\log(1+\alpha_k)$. 如果把时间单位细分，单位时间的回报率做适当调整，则随机游动 $\sum_{k=1}^n\xi_k$ 将收敛到 $\sigma B_t+\mu t$. 因此我们认为股票的价值服从 $X_0e^{\sigma B_t+\mu t}$.

$$EX_t=X_0e^{\mu t}Ee^{\sigma B_t}=X_0e^{\mu t}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int e^{\sigma x}e^{-\frac{x^2}{2t}}dt=X_0e^{\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t}.$$

由于资金可流动，投资股票的平均收益和存银行获得利息应当一致，即 $e^{\gamma t}=e^{\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t}$.

期权定价问题. 如果某期权允许期权持有者在时刻 t 以价格 K 购买某股票，如果到 t 时刻该股票市值低于 K, 则持有者放弃认购权，收益为零；如果该股票市值高于 K, 则持有者的收益为 X_t-K. 两者可以统一写为 $(X_t-K)^+$, 则在 t 时刻预期收益为

$$\begin{aligned}E(X_t-K)^+ &= \int_{-\infty}^{\infty}(X_0e^{\mu t+\sigma x}-K)^+\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp(-\frac{x^2}{2t})dx\\ &= \int_{s}^{\infty}(X_0e^{\mu t+\sigma x\sqrt{t}}-K)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})dx.\end{aligned}$$

其中 s 满足 $X_0e^{\mu t+\sigma s\sqrt{t}}=K$. 记 $\Phi(s)=\int_{-\infty}^{s}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})dx$. 则 $\Phi(-s)=1-\Phi(s)$.

$$\begin{aligned}E(X_t-K)^+ &= X_0e^{\mu t}\int_s^{\infty}e^{\sigma x\sqrt{t}-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dx-K\int_s^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})dx.\\ &= X_0e^{\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t}\int_s^{\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\sigma\sqrt{t})^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx-K\Phi(-s).\\ &= X_0e^{\gamma t}\Phi(\sigma\sqrt{t}-s)-K\Phi(-s).\end{aligned}$$

这里用到了 $\gamma=\mu+\sigma^2/2$ 这一关系. 考虑到利息因素，这在时刻 0 的价值等于

$$E(X_t-K)^+e^{-\gamma t}=X_0\Phi(\sigma\sqrt{t}-s)-Ke^{-\gamma t}\Phi(-s).$$

在公平市场里这也成为 (在时刻 0) 取得 (在时刻 t 以价格 K 购买某股票) 期权的代价. 此即著名的 Black-Scholes 公式.

阅读文献

David Jerison and Daniel Stroock, Norbert Wiener, AMS Notice Vol. 42, No. 4, p430-438, 1995 年 4 月

Kai Lai Chung, Green, Brown and Probability & Brownian Motion on the Line, World Scientific, Singapore, 2002.

参考文献

习题：在以下五题中 $B_t=B(t)$ 是标准布朗运动, 即 $B_0=0,EB_t=0,Var(B_t)=t$.

1. 构造一随机过程，满足布朗运动的定义中的前两条，却不满足第三条.

2. 令 $X_t=tB_{1/t}$, $Y_t=B_{t+s}-B_s$, 证明 $\{X_t\}$, $\{Y_t\}$ 也是标准布朗运动.

3. 设 f 是 R^n 到 R 的连续函数,取定 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 令 $\mathbf{f}(g)=f(g(x_1),g(x_2),\cdots,g(x_n))$ 证明： $\mathbf{f}$ 是连续泛函.

4. 设 W_t 是与 B_t 独立的标准布朗运动，(1) 若 $\xi_t = aB_t + bW_t$ 也是标准布朗运动，请问 a 和 b 应满足什么条件？ (2) $\eta_t = B(2t) - B(t)$ 是标准布朗运动吗？论证你的结论.

5. 试用布朗运动 B_t 的泛函来表示下列微分方程的解：

$$f''(x) = g(x), \quad x \in (a,b); \quad f(a) = c_1, f(b) = c_2.$$

其中 $g(x)$ 是 (a,b) 上的连续函数， c_1, c_2 为常数.

6. 令 $V(t) = e^{-\alpha t} B(e^{2\alpha t})$, 试求 $EV(t)$ 和 $Cov(V(t), V(s))$. $V(t)$ 是 (宽) 平稳过程吗？

7. 称 $\eta_t = B_t + ct$ 为带漂移的布朗运动，其中 $c > 0$ 是常数. 设 $\tau = \inf\{t > 0; \eta_t \notin (a,b)\}$, $a < 0 < b$. 试求 $P_0(\eta_\tau = a)$ 和 $E_0\tau$.

8. 设 $s < t$, 试证

$$P(B_s > 0, B_t > 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}.$$